

Ứng dụng phương pháp phần tử hữu hạn và học máy phân tích bài toán gia cố mái dốc bằng một hàng cọc đứng

Nguyễn Trung Kiên^{1,2,*}, Trần Nhật Linh^{1,2}, Nguyễn Minh Quân

¹ Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại học Bách Khoa Tp.HCM

² Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

TỪ KHÓA

Ổn định mái dốc
Gia cố mái dốc
Hàng cọc đứng
FEM
ANN

TÓM TẮT

Bài báo đề xuất một phương pháp mới trong việc tính toán ổn định mái dốc được gia cố bằng một hàng cọc đứng, sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) kết hợp với mô hình học máy. Trong đó, mô hình FEM của bài toán được xây dựng với phần mềm Plaxis và hệ số an toàn (FS) được tính toán bằng phương pháp giảm dần sức chống cắt (shear strength reduction method). Hệ số FS được tính toán cho các trường hợp khác nhau của vị trí hàng cọc, khoảng cách giữa các cọc đứng, thông số chống cắt của đất nền, và góc mái dốc. Kết quả của mô hình FEM được sử dụng để làm dữ liệu đầu vào huấn luyện mô hình mạng thần kinh nhân tạo (artificial neural network – ANN). Mô hình ANN với các công thức được viết dưới dạng tường minh sẽ cho kết quả hệ số FS nhanh chóng, giảm thiểu thời gian tính toán, và thuận tiện cho việc tìm kiếm phương án thiết kế mái dốc tối ưu. Đồng thời, mô hình học máy cũng phân tích đánh giá tầm quan trọng của các thông số đầu vào (vị trí hàng cọc, khoảng cách giữa các cọc, lực dính và góc nội ma sát của đất nền, góc mái dốc) đến kết quả hệ số FS của bài toán ổn định mái dốc gia cố một hàng cọc đứng. Kết quả cho thấy sức chống cắt của đất và góc dốc ảnh hưởng đến FS nhiều hơn so với vị trí và khoảng cách cọc.

KEYWORDS

Slope stability
Slope reinforcement
Row of vertical piles
FEM
ANN

ABSTRACT

This study proposes a new approach for analyzing the stability of a slope supported by one row of vertical piles, using finite element method (FEM) combined with machine learning algorithm. Initially in the proposed approach, the FEM model was built with commercial software Plaxis, and the factor of safety (FS) was obtained by shear strength reduction method. The values of FS were calculated in different cases of pile locations, pile spacing, cohesion and internal friction angle of soil. The results from FEM models were subsequently used to train the Artificial neural network (ANN). The ANN model with explicit formulas to obtain FS helps to speed up the calculation process and facilitate the optimization in slope design. Besides, the machine learning model evaluates the importance of the input features (pile location, pile spacing, cohesion and internal friction angle of soil, slope angle) to the FS of the slope reinforced by one row of vertical piles. Results show that soil shear strength and slope angle have greater impact on FS than pile locations and spacing do.

1. Giới thiệu

Ổn định mái dốc là một bài toán quan trọng trong ngành địa kỹ thuật và mang tính thời sự cao. Đặc biệt, những sự cố sạt lở mái dốc diễn ra gần đây ở Việt Nam gây ra những hậu quả hết sức nghiêm trọng, có thể kể đến như: (i) vụ sạt lở ở thôn Nậm Tông, xã Nậm Lức, huyện Bắc Hà, tỉnh Lào Cai vào tháng 9 năm 2024 khiến cho 18 người chết và mất tích; (ii) vụ sạt lở đất ở thôn Làng Nủ, xã Phúc Khánh, tỉnh Lào Cai vào tháng 9 năm 2024 khiến cho hơn 80 người chết, mất tích, và bị thương; và (iii) vụ sạt lở đất tại trạm Cảnh sát giao thông Madagui, Lâm Đồng vào tháng 7 năm 2023 làm 4 người thiệt mạng [1]. Do đó, việc nghiên cứu, tính toán, thiết kế các giải pháp gia cố mái dốc trở nên

ngày càng cấp thiết.

Phương pháp sử dụng hàng cọc đứng để gia cố mái dốc đã chứng minh được hiệu quả cao và đang được chú trọng nghiên cứu [2]. Các công trình nghiên cứu sử dụng nhiều phương pháp khác nhau để phân tích bài toán gia cố mái dốc bằng hàng cọc đứng, ví dụ như các phương pháp số bao gồm phần tử hữu hạn (FEM) [3], sai phân hữu hạn [4], sai phân hữu hạn kết hợp phần tử rời rạc [5], cân bằng giới hạn [6], các phương pháp thí nghiệm [3, 7-11]. Trong các nghiên cứu trên, bài toán được xét cho cả trường hợp tải trọng tĩnh và tải trọng động đất. Dù có khá nhiều nghiên cứu về bài toán ổn định mái dốc gia cố hàng cọc đứng, các công trình đã xuất bản thường chỉ tập trung vào việc phân tích và tính toán một phương án cụ thể, chưa xét đến bài toán tối ưu hóa trong

*Liên hệ tác giả: nguyentrungkien@hcmut.edu.vn

Nhận ngày 25/05/2025, sửa xong ngày 03/06/2025, chấp nhận đăng ngày 04/06/2025

Link DOI: <https://doi.org/10.54772/jomc.03.2025.1007>

quá trình thiết kế với các biến số đầu vào như vị trí hàng cọc, khoảng cách cọc, lực dính và góc nội ma sát của đất, và góc mái dốc.

Cụ thể hơn, các phương pháp trong các công trình đã xuất bản đòi hỏi kiến thức chuyên sâu về mô phỏng với thời gian, khối lượng tính toán khá lớn (phương pháp số), hoặc đòi hỏi nhiều về kinh phí và thời gian (phương pháp thí nghiệm). Điều này dẫn tới việc các kỹ sư thiết kế thông thường chỉ tính toán được cho một vài trường hợp cụ thể của vị trí, khoảng cách cọc, sức chống cắt của đất, góc dốc... Do đó, kết quả thiết kế có thể chưa được tối ưu.

Hiện nay, học máy và trí tuệ nhân tạo đang là một trong những phương pháp được ứng dụng rộng rãi trong ngành địa kỹ thuật xây dựng [12]. Việc ứng dụng các thuật toán học máy vào bài toán ổn định mái dốc được gia cố bằng một hàng cọc đứng sẽ có nhiều ưu điểm: (i) kết quả tin cậy; (ii) với mô hình học máy đã được thiết lập, các kỹ sư sẽ dễ dàng sử dụng vì việc này không yêu cầu nhiều kiến thức chuyên sâu; và (iii) thời gian tính toán nhanh giúp cho kỹ sư thiết kế có thể kiểm tra rất nhiều tổ hợp thông số đầu vào, từ đó chọn ra phương án tối ưu. Tuy nhiên, thực tế cho thấy việc nghiên cứu ứng dụng học máy vào bài toán ổn định mái dốc gia cố một hàng cọc còn khá hạn chế.

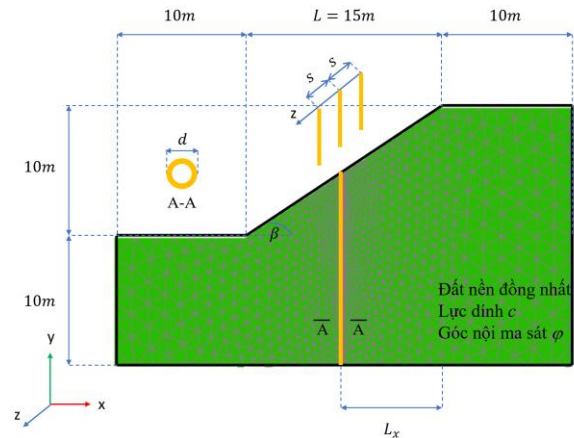
Theo đó, bài báo này xây dựng một phương pháp mới trong việc tính toán ổn định mái dốc được gia cố bằng một hàng cọc đứng, sử dụng phương pháp FEM kết hợp với mô hình mạng thần kinh nhân tạo (ANN). Trong đó, mô hình FEM của bài toán được xây dựng với phần mềm Plaxis và hệ số an toàn (FS) được tính toán bằng phương pháp giảm dần sức chống cắt. Hệ số FS được tính toán cho các trường hợp khác nhau của vị trí hàng cọc, khoảng cách giữa các cọc đứng, lực dính và góc nội ma sát của đất nền, và góc mái dốc. Kết quả của mô hình FEM được sử dụng để làm dữ liệu đầu vào huấn luyện mô hình ANN. Mô hình ANN được thiết lập dưới dạng tường minh này sẽ giúp giảm thời gian và khối lượng tính toán, từ đó giúp kỹ sư dễ dàng chọn lựa phương án tối ưu khi thiết kế.

2. Bài toán ổn định mái dốc gia cố một hàng cọc đứng

Bài báo tập trung phân tích tính toán trường hợp ổn định của mái dốc được gia cố với một hàng cọc đứng, như thể hiện ở Hình 1. Trong đó, hệ số an toàn (FS) được tính toán cho các trường hợp khác nhau của: (i) vị trí hàng cọc trong mái dốc, được thể hiện bằng khoảng cách ngang từ đỉnh dốc đến cọc L_x ; (ii) khoảng cách giữa các cọc trong hàng s ; (iii) lực dính c và góc nội ma sát φ của đất nền; và (iv) góc dốc β . Cọc được sử dụng là cọc thép có tiết diện hình tròn rỗng, đường kính $d = 0.8$ m và bề dày 0.15 m. Mái dốc có chiều dài theo phương ngang là $L = 15$ m. Các kích thước khác của bài toán được thể hiện trong Hình 1. Bài báo hướng đến việc tính toán giá trị hệ số FS cho các trường hợp khác nhau của thông số đầu vào $\{L_x/L, c, \varphi, \beta, s/d\}$.

Phương pháp được đề xuất trong việc tính toán xác định hệ số an toàn FS của mái dốc gia cố một hàng cọc đứng bao gồm 2 bước, và được thực hiện bằng phương pháp kết hợp FEM và ANN. Trong bước 1, mô hình FEM được xây dựng để tính toán giá trị FS cho 553 tổ hợp khác nhau của các thông số đầu vào $\{L_x/L, c, \varphi, \beta, s/d\}$. Giá trị của các thông số đầu

vào được tóm tắt trong Bảng 1, và kết quả FS tương ứng được trình bày trong Phụ lục 1. Trong bước 2, thông số đầu vào và kết quả của 553 trường hợp trên sẽ được sử dụng để huấn luyện mô hình ANN và đánh giá tầm quan trọng của các thông số đầu vào đến giá trị hệ số FS.



Hình 1. Mái dốc gia cố một hàng cọc đứng.

Bảng 1. Khoảng giá trị thông số đầu vào.

Ký hiệu	Ý nghĩa	Giá trị	Đơn vị
L_x/L	Vị trí hàng cọc	0,0.25,0.5,0.75,1	-
c	Lực dính	10, 30, 50	kPa
φ	Góc nội ma sát	10, 20, 30	°
β	Góc mái dốc	33, 45, 60	°
s/d	Khoảng cách cọc	1,2,3,4,5,6,8,10	-

3. Cơ sở lý thuyết

Phần này trình bày tóm tắt về mô hình FEM và ANN được sử dụng trong phương pháp đề xuất để đánh giá hệ số FS của bài toán mái dốc gia cố một hàng cọc đứng.

3.1. Mô hình phần tử hữu hạn FEM

Bài toán mái dốc gia cố một hàng cọc đứng được mô hình như bài toán biến dạng phẳng và được phân tích bằng phương pháp FEM tích hợp trong phần mềm Plaxis [13]. Miền đất nền tính toán được rời rạc hóa bằng lưới các phần tử tam giác 15 nút, như trong Hình 1. Đất nền ứng xử theo mô hình đàn hồi – dẻo lý tưởng với mặt phá hoại Mohr-Coulomb. Các thông số của đất nền như sau: trọng lượng riêng 20 kN/m^3 , module Young 200 MPa , hệ số Poisson 0.25 . Lực dính c và góc nội ma sát φ của đất nền biến thiên như trong Bảng 1. Trong khi đó, cọc được mô hình bằng vật liệu đàn hồi tuyến tính với module Young 60 GPa và hệ số Poisson 0.2 . Đầu trên cọc tự do, trong khi đầu dưới cọc được giả thiết ngàm vào đáy mô hình. Hai biên trái và phải của mô hình bị hạn chế chuyển vị ngang, trong khi biên dưới mô hình bị hạn chế cả chuyển vị đứng và ngang.

Mô hình FEM được phân tích theo 2 giai đoạn. Trong giai đoạn

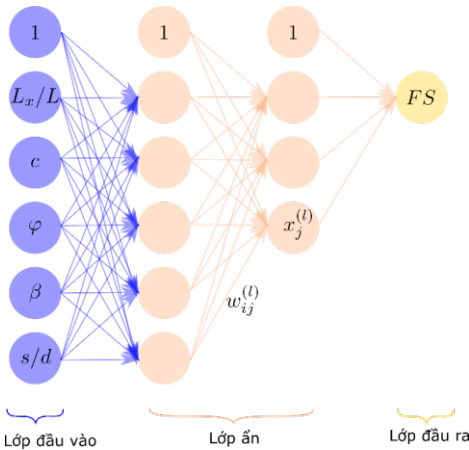
1, ứng suất do trọng lượng bản thân lớp đất và cọc được phát sinh. Trong giai đoạn 2, hệ số an toàn FS được xác định với dạng phân tích “Safety analysis” trong Plaxis. Hệ số an toàn FS được xác định dựa vào phương pháp giảm dần sức chống cắt [13]. Trong đó, lực dính c và $\tan(\varphi)$ được giảm dần theo cùng tỷ lệ cho đến khi mái dốc bị trượt. Hệ số FS được xác định theo công thức:

$$FS = \frac{c}{c_r} = \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi_r} \quad (1)$$

trong đó c_r và φ_r là lực dính và góc nội ma sát huy động (đã giảm dần) ở trạng thái mái dốc bị trượt.

3.2. Mạng thần kinh nhân tạo ANN

Mạng thần kinh nhân tạo (artificial neural network – ANN) là một thuật toán học máy dựa trên ý tưởng về mạng lưới các neuron thần kinh trong bộ não. Trải qua quá trình phát triển, ANN là nhân tố chủ chốt của học sâu, và được ứng dụng rất rộng rãi trong ngành địa kỹ thuật nói chung và ổn định mái dốc nói riêng [14, 15]. Cấu trúc điển hình của ANN được minh họa trong Hình 2, bao gồm lớp đầu vào (input layer), các lớp ẩn (hidden layers), và lớp đầu ra (output layer). Mỗi lớp lại có nhiều nút (neural), kết nối với các nút của các lớp kế cận bằng các trọng số (weight) và ngưỡng (threshold). Trong bài toán ổn định mái dốc gia cố một hàng cọc đứng này, lớp đầu vào sẽ bao gồm các nút chứa thông tin của $\{L_x/L, c, \varphi, \beta, s/d\}$, và lớp đầu ra là giá trị FS . Giá trị tại các nút của lớp ẩn được ký hiệu là $x_j^{(l)}$ với chỉ số trên l thể hiện lớp ẩn thứ l , và chỉ số dưới j thể hiện số thứ tự nút trong lớp ẩn l . Trọng số của các liên kết giữa các nút được ký hiệu là $w_{ij}^{(l)}$, trong đó i và j là số thứ tự của nút trong lớp ở hai đầu liên kết.



Hình 2. Minh họa cấu trúc mạng thần kinh nhân tạo ANN.

Giá trị tại các nút của lớp ẩn được tính với công thức sau:

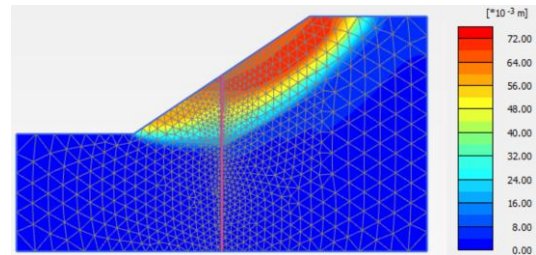
$$x_j^{(l)} = \theta \left(\sum_{i=0} w_{ij}^{(l)} x_i^{(l-1)} \right) \quad (2)$$

Trong đó θ là hàm kích hoạt (activation function), mô tả tỷ lệ truyền qua một nút. Chính nhờ sự tham gia của hàm kích hoạt, thuật toán ANN trở thành mô hình phi tuyến và có thể mô phỏng được nhiều vấn đề phức tạp trong thực tế.

4. Kết quả và thảo luận

4.1. Kiểm chứng mô hình FEM

Kết quả của mô hình FEM được so sánh với kết quả của Wei và Cheng [16] để kiểm chứng độ tin cậy cho trường hợp $L_x = 7.5$ m, $L = 15$ m, $s/d = 8$, $c = 10$ kPa, $\varphi = 20^\circ$, và $\beta = 33^\circ$. Hình dạng mặt trượt của mô hình FEM được thể hiện ở Hình 3 và hệ số an toàn $FS = 1.275$. Hình 3 cho thấy rằng mặt trượt mái dốc được gia cố với hàng cọc đứng thường nằm ở vị trí nông hơn so với mặt trượt sâu của mái dốc tương ứng không gia cố hàng cọc đứng. Đồng thời, mặt trượt được chia tách thành hai mặt trượt thành phần nằm ở bên trái và bên phải hàng cọc đứng.



Hình 3. Mặt trượt mái dốc với trường hợp $s/d = 8$, $FS = 1,275$.

Tài liệu [16] cho kết quả hình dạng mặt trượt tương tự với mặt trượt ở vị trí nông, và giá trị $FS = 1.42$, sai lệch khoảng 10% so với kết quả mô hình FEM. Sự khác biệt này đến từ phương pháp tính toán: tài liệu [16] sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn (finite difference method), trong khi nghiên cứu này sử dụng FEM. Với bài toán ổn định mái dốc, sai lệch này là chấp nhận được, và do đó mô hình FEM đủ tin cậy để tiến hành tính toán dữ liệu FS cho các trường hợp khác nhau của $\{L_x/L, c, \varphi, \beta, s/d\}$.

4.2. Mô hình ANN

Dữ liệu với 553 tổ hợp khác nhau của thông số đầu vào $\{L_x/L, c, \varphi, \beta, s/d\}$ và đầu ra FS tương ứng được trình bày trong Phụ lục 1. Dữ liệu này được sử dụng để huấn luyện mô hình ANN.

Các thông số đầu vào được chuẩn hóa giá trị về khoảng (0,1) bằng công cụ *MinMaxScaler* của thư viện *Scikit-learn* [17]. Việc chuẩn hóa này nhằm đảm bảo các thông số đầu vào có tầm quan trọng như nhau, tránh việc thông số có giá trị tuyệt đối lớn chi phối mô hình ANN. Tập dữ liệu được chia thành phần dữ liệu dùng để huấn luyện mô hình (80%) và dữ liệu kiểm chứng mô hình (20%).

Sử dụng phương pháp thử dần (trials and errors), mô hình ANN sử dụng ước tính hồi quy nhiều lớp (Multi-layer Perceptron regressor) được chọn lựa tối ưu với các thông số được trình bày trong Bảng 2. Cấu trúc ANN tìm được bao gồm 2 lớp ẩn, với số nút neuron ở mỗi lớp lần lượt là 7 và 3. Hàm kích hoạt cho các nút của lớp ẩn được chọn là hàm tang hyperbol *tanh*. Stochastic gradient descent (sgd), một thuật toán tối ưu hiệu quả và được sử dụng rộng rãi trong học máy, được sử dụng để tìm các trọng số $w_{ij}^{(l)}$ với mục tiêu tối thiểu sai số toàn phương trung

bình (mean squared error – MSE).

Bảng 2. Các thông số của mô hình ANN.

Tên	Ý nghĩa	Giá trị
<i>hidden_layer_sizes</i>	Số nút ở mỗi lớp ẩn	(7, 3)
<i>activation</i>	Hàm kích hoạt	tanh
<i>solver</i>	Bộ giải trọng số	sgd
<i>alpha</i>	Trọng số của L_2 regularization	10^{-5}
<i>batch_size</i>	Kích cỡ minibatches của sgd	5
<i>learning_rate_init</i>	Giá trị tốc độ học ban đầu	0,1
<i>power_t</i>	Số mũ cho inverse scaling	0,5
<i>max_iter</i>	Số lần giải lặp tối đa	10^4
<i>momentum</i>	Xung lượng cập nhật gradient descent	0,8

Mô hình ANN đã tối ưu hóa sẽ được viết dưới dạng tường minh, nhằm giúp cho các kỹ sư áp dụng thuận tiện trong công tác thiết kế. Để tìm hệ số FS từ các thông số đầu vào $\{L_x/L, c, \varphi, \beta, s/d\}$, quá trình tính toán sẽ bao gồm các bước chính như sau:

Bước 1: chuẩn hóa dữ liệu đầu vào. Các dữ liệu đều được chuẩn hóa theo công thức $(x - x_{min})/(x_{max} - x_{min})$ để đưa về khoảng giá trị (0, 1) dựa theo tập dữ liệu của 553 tổ hợp. Lưu ý đơn vị của các đại lượng khi sử dụng các công thức bên dưới: c (kPa), φ (deg), β (deg).

$$x_1^{(0)} = L_x/L \quad (3)$$

$$x_2^{(0)} = \frac{c-10}{40} \quad (4)$$

$$x_3^{(0)} = \frac{\varphi-10}{20} \quad (5)$$

$$x_4^{(0)} = \frac{\beta-33}{27} \quad (6)$$

$$x_5^{(0)} = \frac{(s/d)-1}{9} \quad (7)$$

Bước 2: tính giá trị tại các nút của lớp ẩn số 1 theo công thức nhân ma trận.

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \\ x_5^{(1)} \\ x_6^{(1)} \\ x_7^{(1)} \end{bmatrix} = \tanh \left(\begin{bmatrix} -0,5243 & -0,6313 & -0,6388 & 1,7216 & 0,0833 \\ -1,4826 & 0,6505 & 0,3184 & -1,0897 & -0,0041 \\ 0,4271 & 1,138 & -0,207 & -1,0478 & -0,3722 \\ 0,2091 & 0,2185 & -0,8154 & -0,3341 & 0,5421 \\ 0,2121 & -0,397 & -0,082 & -0,3748 & 0,4297 \\ 0,3275 & 0,7531 & -0,4925 & 0,45 & -0,0137 \\ 0,0271 & 1,0564 & 0,3993 & 0,3281 & 0,2556 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \\ x_5^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,3368 \\ 0,8491 \\ 0,2029 \\ -0,4146 \\ 0,9018 \\ -0,625 \\ -0,4489 \end{bmatrix} \right) \quad (8)$$

Bước 3: tính giá trị tại các nút của lớp ẩn số 2 theo công thức nhân ma trận.

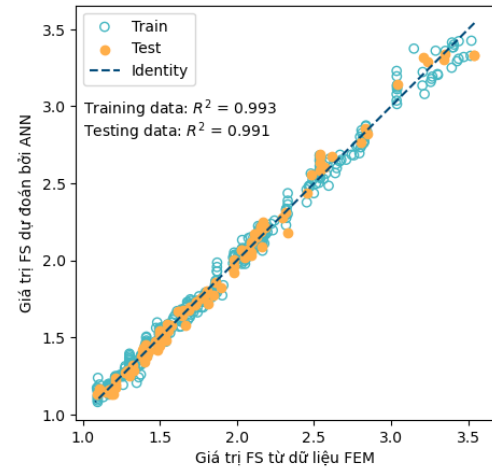
$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \tanh \left(\begin{bmatrix} -0,9911 & -0,1673 & 0,6716 & -0,4385 & 0,8026 & -0,3968 & 0,6686 \\ 0,5426 & 0,8605 & 0,3224 & 0,2327 & -0,2643 & -0,3277 & 0,4695 \\ -1,3715 & 0,9261 & 0,3527 & 0,0166 & -0,4509 & 0,0455 & -0,0231 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \\ x_5^{(1)} \\ x_6^{(1)} \\ x_7^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,3757 \\ 0,2935 \\ -0,734 \end{bmatrix} \right) \quad (9)$$

Bước 4: tính giá trị FS theo công thức nhân ma trận.

$$FS = [0,9474 \quad 0,8824 \quad 0,9398] \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} + 1,5656 \quad (10)$$

Để kiểm chứng tính chính xác của mô hình ANN, kết quả FS dự đoán từ mô hình ANN sẽ được so sánh với kết quả của tập dữ liệu huấn luyện và tập dữ liệu kiểm chứng, như thể hiện trong Hình 4. Trục hoành của đồ thị là giá trị FS đầu vào của tập dữ liệu (True FS), trong khi đó trục tung là giá trị dự đoán của mô hình ANN (Predicted FS). Mô hình ANN với độ chính xác càng cao sẽ cho giá trị FS dự đoán càng gần với

giá trị đầu vào, nghĩa là các điểm nằm gần đường 45° (identity). Hình 4 cho thấy các điểm đều nằm rất gần đường 45°, cho cả 2 trường hợp tập dữ liệu huấn luyện và tập dữ liệu kiểm chứng, chứng minh cho độ tin cậy của mô hình ANN.



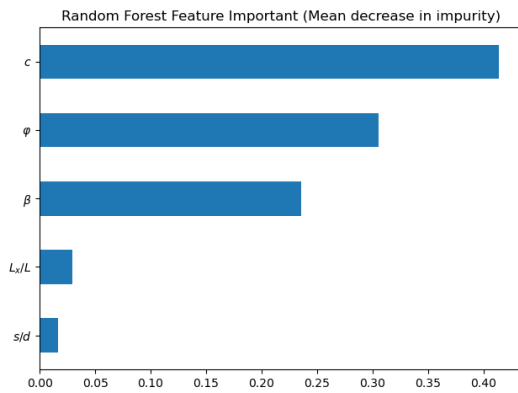
Hình 4. Kết quả dự đoán từ ANN so với dữ liệu đầu vào.

Thực hiện việc đánh giá sai số trên dữ liệu kiểm chứng, các kết quả thu được như sau: (i) sai số tương đối trung bình (Mean absolute percentage error – MAPE) là 0,0209, (ii) sai số tuyệt đối trung bình (Mean absolute error – MAE) là 0,0362; và (iii) sai số bình phương trung bình (Mean square error – MSE) là 0,0024. Các sai số trên một lần nữa chứng minh độ tin cậy cao của mô hình ANN.

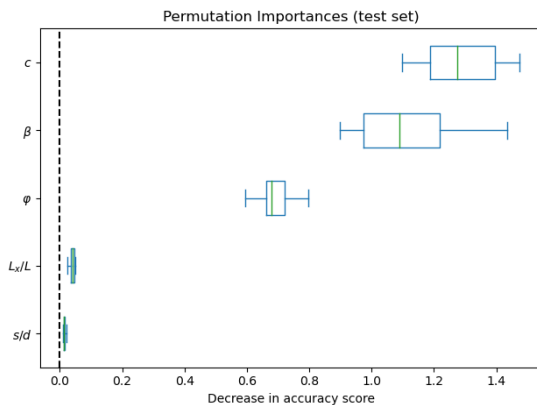
4.3. Đánh giá mức độ ảnh hưởng của các thông số đầu vào

Phần này trình bày đánh giá về mức độ ảnh hưởng (tầm quan trọng) của các thông số đầu vào $\{L_x/L, c, \varphi, \beta, s/d\}$ đến thông số đầu ra FS . Bài báo này sử dụng hai phương pháp đánh giá mức độ ảnh hưởng: (i) tổng mức giảm tạp chất của nút (mean decrease in impurity – MDI) dựa vào giải thuật Random Forest Regressor [18], và (ii) tầm quan trọng theo phép hoán vị (permutation importance – PI) [19]. Kết quả đánh giá theo phương pháp MDI được thể hiện trong Hình 5, trong khi kết quả theo phương pháp PI được thể hiện trong Hình 6.

Kết quả của cả hai phương pháp tương đối phù hợp với nhau, với nhóm các thông số $\{c, \varphi, \beta\}$ có mức độ ảnh hưởng đến kết quả FS lớn hơn so với nhóm các thông số $\{L_x/L, s/d\}$. Đặc biệt, lực dính c có ảnh hưởng lớn nhất đến kết quả FS trong cả hai phương pháp, điều này phù hợp với thực tế. Thông số φ và β lần lượt xếp hạng 2 và 3 trong phương pháp MDI, nhưng xếp hạng 3 và 2 trong phương pháp PI. Sự khác biệt nhỏ này là do MDI đánh giá mức độ quan trọng dựa trên tập dữ liệu huấn luyện, còn PI đánh giá dựa trên tập dữ liệu kiểm chứng. Cả hai phương pháp MDI và PI đều đưa ra kết luận là FS rất ít nhạy với thông số $\{L_x/L, s/d\}$. Kết quả này hợp lý khi quan sát sơ bộ ở Phụ lục 1 cho thấy với giá trị s/d thay đổi 10 lần (từ 1 đến 10) gây ra sự thay đổi hệ số FS không nhiều như các thông số khác.



Hình 5. Mức độ ảnh hưởng của thông số đầu vào theo phương pháp MDI.



Hình 6. Mức độ ảnh hưởng của thông số đầu vào theo phương pháp PI.

5. Kết luận

Bài báo đề xuất một phương pháp mới trong việc tính toán ổn định mái dốc được gia cố bằng một hàng cọc đứng, sử dụng phương pháp FEM kết hợp với mô hình học máy ANN. Phương pháp này được trình bày với các công thức dưới dạng tường minh, với các thông số đầu vào $\{L_x/L, c, \phi, \beta, s/d\}$ và thông số đầu ra FS. Ngoài ra, bài báo cũng đánh giá mức độ ảnh hưởng của các thông số đầu vào đến kết quả FS bằng hai phương pháp MDI và PI. Kết quả cho thấy nhóm các thông số $\{c, \phi, \beta\}$ có mức độ ảnh hưởng đến kết quả FS lớn hơn đáng kể so với nhóm các thông số $\{L_x/L, s/d\}$.

Bài báo chỉ giới hạn ở mái dốc gia cố một hàng cọc và ở điều kiện thời tiết khô ráo. Trong thực tế, mái dốc có thể được gia cố với nhiều hơn một hàng cọc. Đồng thời, các trường hợp nguy hiểm sạt lở mái dốc thường xảy ra khi trời mưa, lũ. Nghiên cứu nên được tiến hành thêm ở những điều kiện vừa nêu để tăng thêm tính ứng dụng cho bài toán.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Bách Khoa, ĐHQG-HCM trong khuôn khổ đề tài mã số To-KTXD-2024-17. Chúng tôi xin cảm ơn Trường Đại học Bách Khoa, ĐHQG-HCM đã hỗ trợ cho nghiên cứu này.

Tài liệu tham khảo

- [1]. Phương Anh (19/9/2024). Nhìn lại những vụ sạt lở đất gây hậu quả nghiêm trọng. <https://laodong.vn/infographic/nhin-lai-nhung-vu-sat-lo-dat-gay-hau-qua-nghiem-trong-1396737.lido>.
- [2]. Gupta, P., & Mehndiratta, S. (2024). Exploring the Efficacy of Slope Stabilization Using Piles: A Comprehensive Review. *Indian Geotechnical Journal*, 1-18.
- [3]. Zhang, L., Zhang, P., Chen, C., Zhang, Z., & Rui, R. (2024). Experimental and finite element analyses of seismic behavior of pile-reinforced soft clayey slope. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 83(7), 275.
- [4]. Wei, W. B., & Cheng, Y. M. (2009). Strength reduction analysis for slope reinforced with one row of piles. *Computers and Geotechnics*, 36(7), 1176-1185.
- [5]. Zhang, L., Li, Y., Zheng, H., & Lin, S. (2024). An FDM–DEM coupling method for analyzing the mechanical behavior of a slope reinforced by piles. *Environmental Earth Sciences*, 83(8), 241.
- [6]. Li, X., Su, L., He, S., & Xu, J. (2016). Limit equilibrium analysis of seismic stability of slopes reinforced with a row of piles. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 40(8), 1241-1250.
- [7]. Wu, H. G., & Pai, L. F. (2022). Shaking table test for reinforcement of soil slope with multiple sliding surfaces by reinforced double-row anti-slide piles. *Journal of Mountain Science*, 19(5), 1419-1436.
- [8]. Wang, L. P., & Zhang, G. A. (2014). Centrifuge model test study on pile reinforcement behavior of cohesive soil slopes under earthquake conditions. *Landslides*, 11, 213-223.
- [9]. Hu, H., Huang, Y., Xiong, M., & Zhao, L. (2021). Investigation of seismic behavior of slope reinforced by anchored pile structures using shaking table tests. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 150, 106900.
- [10]. Lai, J., Liu, Y., Liu, Y., & Jiangbo, X. (2024). Experimental study on seismic characteristics of slope supported by long-short composite anti-slide piles. *Scientific Reports*, 14(1), 15137.
- [11]. Bao, N., Chen, J., Sun, R., Yan, K., & Shi, Z. (2024). Seismic response of soil arching in pile-reinforced soil slopes: Insights from shaking table tests. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 184, 108852.
- [12]. Phoon, K. K., & Zhang, W. (2023). Future of machine learning in geotechnics. *Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards*, 17(1), 7-22.
- [13]. Plaxis manual (2023). Tutorial Manual 2D, Bentley.
- [14]. Nasiri, M., & Amiri, E. (2025). ANN Insight in Forecasting Slope Stability by Analyzing the Influence of Strength Parameters in 2D and 3D Scenarios. *Transportation Infrastructure Geotechnology*, 12(4), 126.
- [15]. Kumar, N., & Kumari, S. (2024). State-of-the-art advanced hybrid ANNs paradigm for assessment and prediction of slope stability. *Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design*, 7(4), 3483-3509.
- [16]. Wei, W.B. and Cheng, Y.M. (2009). Strength reduction analysis for slope reinforced with one row of piles. *Computers and Geotechnics*, 36(7), pp.1176-1185.
- [17]. Pedregosa et al (2011). Scikit-learn: Machine Learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, 12, pp. 2825-2830.
- [18]. Pedregosa et al (2011). Feature importances with a forest of trees. https://scikit-learn.org/stable/auto_examples/ensemble/plot_forest_importances.html.
- [19]. Pedregosa et al (2011). Permutation Feature Importance. https://scikit-learn.org/stable/modules/permutation_importance.html.

Phụ lục 1

Dữ liệu từ mô hình FEM sử dụng để huấn luyện và kiểm chứng ANN

Đơn vị: c (kPa), φ (deg), β (deg)

L_x/L	c	φ	β	s/d	FS	L_x/L	c	φ	β	s/d	FS
0	10	20	33	1	1,171	0,5	30	30	45	4	1,679
0	10	20	33	2	1,170	0,5	30	30	45	5	1,672
0	10	20	33	3	1,172	0,5	30	30	45	6	1,647
0	10	20	33	4	1,170	0,5	30	30	45	8	1,630
0	10	20	33	5	1,170	0,5	30	30	45	10	1,507
0	10	20	33	6	1,170	0,5	30	30	33	1	2,744
0	10	20	33	8	1,170	0,5	30	30	33	2	2,669
0	10	20	33	10	1,133	0,5	30	30	33	3	2,616
0	10	30	33	1	1,508	0,5	30	30	33	4	2,602
0	10	30	33	2	1,496	0,5	30	30	33	5	2,574
0	10	30	33	3	1,507	0,5	30	30	33	6	2,569
0	10	30	33	4	1,505	0,5	30	30	33	10	2,330
0	10	30	33	5	1,508	0,5	50	10	45	1	1,419
0	10	30	33	6	1,504	0,5	50	10	45	2	1,413
0	10	30	33	8	1,508	0,5	50	10	45	3	1,403
0	10	30	33	10	1,487	0,5	50	10	45	4	1,399
0	30	10	33	1	1,540	0,5	50	10	45	5	1,395
0	30	10	33	2	1,539	0,5	50	10	45	6	1,394
0	30	10	33	3	1,536	0,5	50	10	45	8	1,389
0	30	10	33	4	1,526	0,5	50	10	45	10	1,302
0	30	10	33	5	1,518	0,5	50	10	33	1	2,153
0	30	10	33	6	1,510	0,5	50	10	33	2	2,152
0	30	10	33	8	1,504	0,5	50	10	33	3	2,152
0	30	10	33	10	1,413	0,5	50	10	33	4	2,152
0	30	20	45	1	1,316	0,5	50	10	33	5	2,152
0	30	20	45	2	1,301	0,5	50	10	33	6	2,152
0	30	20	45	3	1,292	0,5	50	10	33	8	2,152
0	30	20	45	4	1,287	0,5	50	10	33	10	2,032
0	30	20	45	5	1,279	0,5	50	20	45	1	1,912
0	30	20	45	6	1,278	0,5	50	20	45	2	1,896
0	30	20	45	8	1,274	0,5	50	20	45	3	1,874
0	30	20	45	10	1,213	0,5	50	20	45	4	1,856
0	30	20	33	1	2,034	0,5	50	20	45	5	1,846
0	30	20	33	2	2,038	0,5	50	20	45	6	1,837
0	30	20	33	3	2,034	0,5	50	20	45	8	1,816
0	30	20	33	4	2,026	0,5	50	20	45	10	1,651
0	30	20	33	5	2,016	0,5	50	20	33	1	2,837
0	30	20	33	6	2,007	0,5	50	20	33	2	2,836
0	30	20	33	8	2,002	0,5	50	20	33	3	2,833
0	30	20	33	10	1,871	0,5	50	20	33	4	2,808
0	30	30	45	1	1,601	0,5	50	20	33	5	2,811
0	30	30	45	2	1,591	0,5	50	20	33	6	2,799
0	30	30	45	3	1,584	0,5	50	20	33	8	2,786
0	30	30	45	4	1,581	0,5	50	20	33	10	2,537

L_x/L	c	φ	β	s/d	FS	L_x/L	c	φ	β	s/d	FS
0	30	30	45	5	1,579	0,5	50	30	45	1	2,293
0	30	30	45	6	1,580	0,5	50	30	45	2	2,244
0	30	30	45	8	1,567	0,5	50	30	45	3	2,222
0	30	30	45	10	1,513	0,5	50	30	45	4	2,180
0	30	30	33	1	2,466	0,5	50	30	45	5	2,176
0	30	30	33	2	2,472	0,5	50	30	45	6	2,177
0	30	30	33	3	2,473	0,5	50	30	45	8	2,178
0	30	30	33	4	2,471	0,5	50	30	45	10	1,982
0	30	30	33	5	2,452	0,5	50	30	33	1	3,521
0	30	30	33	6	2,458	0,5	50	30	33	2	3,439
0	30	30	33	8	2,453	0,5	50	30	33	3	3,395
0	30	30	33	10	2,330	0,5	50	30	33	4	3,407
0	50	10	45	1	1,405	0,5	50	30	33	5	3,404
0	50	10	45	2	1,386	0,5	50	30	33	6	3,352
0	50	10	45	3	1,389	0,5	50	30	33	8	3,344
0	50	10	45	4	1,385	0,5	50	30	33	10	3,036
0	50	10	45	5	1,384	0,5	50	30	60	1	1,202
0	50	10	45	6	1,377	0,5	50	30	60	2	1,187
0	50	10	45	8	1,382	0,5	50	30	60	3	1,184
0	50	10	45	10	1,302	0,5	50	30	60	4	1,181
0	50	10	33	1	2,031	0,5	50	30	60	5	1,174
0	50	10	33	2	2,031	0,5	50	30	60	6	1,161
0	50	10	33	3	2,031	0,5	50	30	60	8	1,156
0	50	10	33	4	2,031	0,75	10	20	33	1	1,245
0	50	10	33	5	2,031	0,75	10	20	33	2	1,239
0	50	10	33	6	2,031	0,75	10	20	33	3	1,245
0	50	10	33	8	2,031	0,75	10	20	33	4	1,259
0	50	10	33	10	2,031	0,75	10	20	33	5	1,262
0	50	20	45	1	1,760	0,75	10	20	33	6	1,256
0	50	20	45	2	1,741	0,75	10	20	33	8	1,259
0	50	20	45	3	1,736	0,75	10	20	33	10	1,099
0	50	20	45	4	1,735	0,75	10	30	33	1	1,627
0	50	20	45	5	1,731	0,75	10	30	33	2	1,615
0	50	20	45	6	1,727	0,75	10	30	33	3	1,612
0	50	20	45	8	1,724	0,75	10	30	33	4	1,636
0	50	20	45	10	1,642	0,75	10	30	33	5	1,639
0	50	20	33	1	2,537	0,75	10	30	33	6	1,637
0	50	20	33	2	2,537	0,75	10	30	33	8	1,637
0	50	20	33	3	2,537	0,75	10	30	33	10	1,476
0	50	20	33	4	2,537	0,75	30	10	33	1	1,541
0	50	20	33	5	2,537	0,75	30	10	33	2	1,542
0	50	20	33	6	2,537	0,75	30	10	33	3	1,542
0	50	20	33	8	2,537	0,75	30	10	33	4	1,542
0	50	20	33	10	2,537	0,75	30	10	33	5	1,542
0	50	30	45	1	2,090	0,75	30	10	33	6	1,540
0	50	30	45	2	2,034	0,75	30	10	33	8	1,533
0	50	30	45	3	2,089	0,75	30	10	33	10	1,412

L _x /L	c	φ	β	s/d	FS	L _x /L	c	φ	β	s/d	FS
0	50	30	45	4	2,080	0,75	30	20	45	1	1,358
0	50	30	45	5	2,076	0,75	30	20	45	2	1,338
0	50	30	45	6	2,071	0,75	30	20	45	3	1,332
0	50	30	45	8	2,057	0,75	30	20	45	4	1,326
0	50	30	45	10	1,982	0,75	30	20	45	5	1,318
0	50	30	33	1	3,301	0,75	30	20	45	6	1,314
0	50	30	33	2	3,304	0,75	30	20	45	8	1,302
0	50	30	33	3	3,268	0,75	30	20	45	10	1,211
0	50	30	33	4	3,263	0,75	30	20	33	1	2,159
0	50	30	33	5	3,257	0,75	30	20	33	2	2,110
0	50	30	33	6	3,203	0,75	30	20	33	3	2,102
0	50	30	33	8	3,217	0,75	30	20	33	4	2,098
0	50	30	33	10	3,038	0,75	30	20	33	5	2,073
0	50	30	60	1	1,200	0,75	30	20	33	6	2,067
0	50	30	60	2	1,188	0,75	30	20	33	8	2,053
0	50	30	60	3	1,192	0,75	30	20	33	10	1,871
0	50	30	60	4	1,173	0,75	30	30	45	1	1,744
0	50	30	60	5	1,174	0,75	30	30	45	2	1,707
0	50	30	60	6	1,164	0,75	30	30	45	3	1,719
0	50	30	60	8	1,150	0,75	30	30	45	4	1,701
0	50	30	60	10	1,119	0,75	30	30	45	5	1,695
0,25	10	20	33	1	1,325	0,75	30	30	45	6	1,682
0,25	10	20	33	2	1,324	0,75	30	30	45	8	1,664
0,25	10	20	33	3	1,323	0,75	30	30	45	10	1,505
0,25	10	20	33	4	1,325	0,75	30	30	33	1	2,479
0,25	10	20	33	5	1,377	0,75	30	30	33	2	2,577
0,25	10	20	33	6	1,364	0,75	30	30	33	3	2,484
0,25	10	20	33	8	1,350	0,75	30	30	33	4	2,529
0,25	10	20	33	10	1,096	0,75	30	30	33	5	2,491
0,25	10	30	33	1	1,678	0,75	30	30	33	6	2,513
0,25	10	30	33	2	1,711	0,75	30	30	33	8	2,499
0,25	10	30	33	3	1,706	0,75	30	30	33	10	2,330
0,25	10	30	33	4	1,693	0,75	50	10	45	1	1,409
0,25	10	30	33	5	1,686	0,75	50	10	45	2	1,409
0,25	10	30	33	6	1,682	0,75	50	10	45	3	1,407
0,25	10	30	33	8	1,666	0,75	50	10	45	4	1,392
0,25	10	30	33	10	1,494	0,75	50	10	45	5	1,388
0,25	30	10	33	1	1,557	0,75	50	10	45	6	1,390
0,25	30	10	33	2	1,557	0,75	50	10	45	8	1,382
0,25	30	10	33	3	1,558	0,75	50	10	45	10	1,302
0,25	30	10	33	4	1,556	0,75	50	10	33	1	2,125
0,25	30	10	33	5	1,552	0,75	50	10	33	2	2,125
0,25	30	10	33	6	1,545	0,75	50	10	33	3	2,126
0,25	30	10	33	8	1,534	0,75	50	10	33	4	2,125
0,25	30	10	33	10	1,413	0,75	50	10	33	5	2,126
0,25	30	20	45	1	1,402	0,75	50	10	33	6	2,126
0,25	30	20	45	2	1,383	0,75	50	10	33	8	2,125

L _x /L	c	φ	β	s/d	FS	L _x /L	c	φ	β	s/d	FS
0,25	30	20	45	3	1,373	0,75	50	10	33	10	2,031
0,25	30	20	45	4	1,356	0,75	50	20	45	1	1,871
0,25	30	20	45	5	1,336	0,75	50	20	45	2	1,824
0,25	30	20	45	6	1,328	0,75	50	20	45	3	1,809
0,25	30	20	45	8	1,317	0,75	50	20	45	4	1,803
0,25	30	20	45	10	1,211	0,75	50	20	45	5	1,800
0,25	30	20	33	1	2,193	0,75	50	20	45	6	1,793
0,25	30	20	33	2	2,180	0,75	50	20	45	8	1,781
0,25	30	20	33	3	2,165	0,75	50	20	45	10	1,642
0,25	30	20	33	4	2,122	0,75	50	20	33	1	2,825
0,25	30	20	33	5	2,112	0,75	50	20	33	2	2,825
0,25	30	20	33	6	2,110	0,75	50	20	33	3	2,825
0,25	30	20	33	8	2,091	0,75	50	20	33	4	2,821
0,25	30	20	33	10	1,871	0,75	50	20	33	5	2,808
0,25	30	30	45	1	1,703	0,75	50	20	33	6	2,803
0,25	30	30	45	2	1,680	0,75	50	20	33	8	2,795
0,25	30	30	45	3	1,665	0,75	50	20	33	10	2,537
0,25	30	30	45	4	1,648	0,75	50	30	45	1	2,233
0,25	30	30	45	5	1,643	0,75	50	30	45	2	2,198
0,25	30	30	45	6	1,635	0,75	50	30	45	3	2,187
0,25	30	30	45	8	1,628	0,75	50	30	45	4	2,160
0,25	30	30	45	10	1,517	0,75	50	30	45	5	2,120
0,25	30	30	33	1	2,709	0,75	50	30	45	6	2,142
0,25	30	30	33	2	2,677	0,75	50	30	45	8	2,081
0,25	30	30	33	3	2,667	0,75	50	30	45	10	1,982
0,25	30	30	33	4	2,644	0,75	50	30	33	1	3,540
0,25	30	30	33	5	2,648	0,75	50	30	33	2	3,538
0,25	30	30	33	6	2,638	0,75	50	30	33	3	3,516
0,25	30	30	33	8	2,595	0,75	50	30	33	4	3,471
0,25	30	30	33	10	2,330	0,75	50	30	33	5	3,438
0,25	50	10	45	1	1,430	0,75	50	30	33	6	3,428
0,25	50	10	45	2	1,421	0,75	50	30	33	8	3,393
0,25	50	10	45	3	1,417	0,75	50	30	33	10	3,037
0,25	50	10	45	4	1,416	0,75	50	30	60	1	1,262
0,25	50	10	45	5	1,416	0,75	50	30	60	4	1,215
0,25	50	10	45	6	1,414	0,75	50	30	60	5	1,208
0,25	50	10	45	8	1,402	0,75	50	30	60	6	1,180
0,25	50	10	45	10	1,302	0,75	50	30	60	8	1,165
0,25	50	10	33	1	2,167	0,75	50	30	60	10	1,108
0,25	50	10	33	2	2,167	1	10	20	33	1	1,097
0,25	50	10	33	3	2,167	1	10	20	33	2	1,097
0,25	50	10	33	4	2,167	1	10	20	33	3	1,097
0,25	50	10	33	5	2,167	1	10	20	33	4	1,097
0,25	50	10	33	6	2,167	1	10	20	33	5	1,097
0,25	50	10	33	8	2,166	1	10	20	33	6	1,097
0,25	50	10	33	10	2,031	1	10	20	33	8	1,097
0,25	50	20	45	1	1,808	1	10	20	33	10	1,095

L _x /L	c	φ	β	s/d	FS	L _x /L	c	φ	β	s/d	FS
0,25	50	20	45	2	1,796	1	10	30	33	1	1,472
0,25	50	20	45	3	1,795	1	10	30	33	2	1,472
0,25	50	20	45	4	1,787	1	10	30	33	3	1,472
0,25	50	20	45	5	1,777	1	10	30	33	4	1,472
0,25	50	20	45	6	1,772	1	10	30	33	5	1,471
0,25	50	20	45	8	1,770	1	10	30	33	6	1,471
0,25	50	20	45	10	1,641	1	10	30	33	8	1,471
0,25	50	20	33	1	2,845	1	10	30	33	10	1,471
0,25	50	20	33	2	2,844	1	30	10	33	1	1,418
0,25	50	20	33	3	2,837	1	30	10	33	2	1,420
0,25	50	20	33	4	2,816	1	30	10	33	3	1,419
0,25	50	20	33	5	2,801	1	30	10	33	4	1,419
0,25	50	20	33	6	2,776	1	30	10	33	5	1,419
0,25	50	20	33	8	2,759	1	30	10	33	6	1,419
0,25	50	20	33	10	2,537	1	30	10	33	8	1,421
0,25	50	30	45	1	2,169	1	30	10	33	10	1,413
0,25	50	30	45	2	2,138	1	30	20	45	1	1,211
0,25	50	30	45	3	2,141	1	30	20	45	2	1,212
0,25	50	30	45	4	2,116	1	30	20	45	3	1,211
0,25	50	30	45	5	2,075	1	30	20	45	4	1,211
0,25	50	30	45	6	2,106	1	30	20	45	5	1,211
0,25	50	30	45	8	2,069	1	30	20	45	6	1,211
0,25	50	30	45	10	1,982	1	30	20	45	8	1,211
0,25	50	30	33	1	3,397	1	30	20	45	10	1,211
0,25	50	30	33	2	3,148	1	30	20	33	1	1,863
0,25	50	30	33	3	3,289	1	30	20	33	2	1,863
0,25	50	30	33	4	3,348	1	30	20	33	3	1,864
0,25	50	30	33	5	3,209	1	30	20	33	4	1,864
0,25	50	30	33	6	3,234	1	30	20	33	5	1,859
0,25	50	30	33	8	3,205	1	30	20	33	6	1,859
0,25	50	30	33	10	3,039	1	30	20	33	8	1,859
0,25	50	30	60	1	1,191	1	30	20	33	10	1,860
0,25	50	30	60	2	1,190	1	30	30	45	1	1,500
0,25	50	30	60	3	1,169	1	30	30	45	2	1,499
0,25	50	30	60	4	1,158	1	30	30	45	3	1,498
0,25	50	30	60	5	1,159	1	30	30	45	4	1,499
0,25	50	30	60	6	1,162	1	30	30	45	5	1,499
0,25	50	30	60	8	1,158	1	30	30	45	6	1,500
0,5	10	20	33	1	1,401	1	30	30	45	8	1,499
0,5	10	20	33	2	1,339	1	30	30	45	10	1,501
0,5	10	20	33	3	1,324	1	30	30	33	1	2,321
0,5	10	20	33	4	1,301	1	30	30	33	2	2,320
0,5	10	20	33	5	1,277	1	30	30	33	3	2,319
0,5	10	20	33	6	1,273	1	30	30	33	4	2,319
0,5	10	20	33	8	1,275	1	30	30	33	5	2,319
0,5	10	20	33	10	1,215	1	30	30	33	6	2,320
0,5	10	30	33	1	1,905	1	30	30	33	8	2,319

L _x /L	c	φ	β	s/d	FS	L _x /L	c	φ	β	s/d	FS
0,5	10	30	33	2	1,846	1	30	30	33	10	2,330
0,5	10	30	33	3	1,784	1	50	10	45	1	1,303
0,5	10	30	33	4	1,764	1	50	10	45	2	1,304
0,5	10	30	33	5	1,769	1	50	10	45	3	1,304
0,5	10	30	33	6	1,740	1	50	10	45	4	1,304
0,5	10	30	33	8	1,745	1	50	10	45	5	1,304
0,5	10	30	33	10	1,483	1	50	10	45	6	1,303
0,5	30	10	33	1	1,552	1	50	10	45	8	1,304
0,5	30	10	33	2	1,551	1	50	10	45	10	1,302
0,5	30	10	33	3	1,551	1	50	10	33	1	2,050
0,5	30	10	33	4	1,551	1	50	10	33	2	2,052
0,5	30	10	33	5	1,550	1	50	10	33	3	2,051
0,5	30	10	33	6	1,547	1	50	10	33	4	2,051
0,5	30	10	33	8	1,541	1	50	10	33	5	2,051
0,5	30	10	33	10	1,413	1	50	10	33	6	2,051
0,5	30	20	45	1	1,377	1	50	10	33	8	2,051
0,5	30	20	45	2	1,354	1	50	10	33	10	2,031
0,5	30	20	45	3	1,342	1	50	20	45	1	1,641
0,5	30	20	45	4	1,338	1	50	20	45	2	1,640
0,5	30	20	45	5	1,331	1	50	20	45	3	1,640
0,5	30	20	45	6	1,322	1	50	20	45	4	1,641
0,5	30	20	45	8	1,319	1	50	20	45	5	1,641
0,5	30	20	45	10	1,210	1	50	20	45	6	1,641
0,5	30	20	33	1	2,188	1	50	20	45	8	1,640
0,5	30	20	33	2	2,166	1	50	20	45	10	1,639
0,5	30	20	33	3	2,149	1	50	20	33	1	2,535
0,5	30	20	33	4	2,117	1	50	20	33	2	2,537
0,5	30	20	33	5	2,106	1	50	20	33	3	2,537
0,5	30	20	33	6	2,098	1	50	20	33	4	2,539
0,5	30	20	33	8	2,093	1	50	20	33	5	2,540
0,5	30	20	33	10	1,872	1	50	20	33	6	2,540
0,5	30	30	45	1	1,755	1	50	20	33	8	2,542
0,5	30	30	45	2	1,698	1	50	20	33	10	2,533
0,5	30	30	45	3	1,679	1	50	30	45	1	1,989
0,5	30	30	33	8	2,562	1	50	30	45	2	1,981
1	50	30	33	4	3,039	1	50	30	45	3	1,975
1	50	30	33	5	3,039	1	50	30	45	4	1,978
1	50	30	33	6	3,039	1	50	30	45	5	1,990
1	50	30	33	8	3,036	1	50	30	45	6	1,975
1	50	30	33	10	3,036	1	50	30	45	8	1,975
1	50	30	60	2	1,107	1	50	30	45	10	1,982
1	50	30	60	3	1,111	1	50	30	33	1	3,041
1	50	30	60	4	1,112	1	50	30	33	2	3,039
1	50	30	60	5	1,111	1	50	30	33	3	3,039
1	50	30	60	10	1,092						