

# Khung kết hợp lấy mẫu quan trọng và lấy mẫu mô phỏng trong phân tích xác suất hư hỏng kết cấu giàn thép phi tuyến

Trương Việt Hùng<sup>1,\*</sup>, Lê Đình Tiến<sup>2</sup>, Vũ Anh Tuấn<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Khoa Công trình, Trường Đại học Thủy lợi

<sup>2</sup> Bộ môn Công nghệ và Quản lý Xây dựng, Khoa Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội

## TỪ KHOÁ

Lấy mẫu quan trọng  
Lấy mẫu mô phỏng  
Kết cấu giàn thép  
Xác suất hư hỏng  
Phi tuyến  
Monte Carlo

## TÓM TẮT

Trong phân tích độ tin cậy của kết cấu giàn thép phi tuyến, các phương pháp lấy mẫu mô phỏng như Monte Carlo Simulation (MCS), Latin Hypercube Sampling (LHS) và Quasi-Monte Carlo Sampling (QMCS) thường yêu cầu số lượng mẫu lớn để ước lượng xác suất hư hỏng thấp (dưới 0,1%), dẫn đến chi phí tính toán cao. Bài báo đề xuất một khung kết hợp giữa kỹ thuật lấy mẫu quan trọng nâng cao tự thích ứng (aEIS) và các phương pháp MCS, LHS, QMCS để giảm đáng kể số lượng mẫu cần thiết, đồng thời duy trì độ chính xác. Khung này tận dụng cơ chế dịch chuyển trung bình và điều chỉnh độ lệch chuẩn động của aEIS, kết hợp với khả năng bao quát không gian xác suất của MCS, LHS và QMCS. Một nghiên cứu điển hình trên giàn thép phẳng 39 thanh đã được thực hiện, cho thấy khung kết hợp, đặc biệt QMCS-aEIS, đạt hệ số biến thiên (COV) thấp hơn đáng kể so với EIS, cho phép giảm số mẫu mà vẫn đảm bảo độ chính xác. Kết quả này cung cấp một giải pháp hiệu quả cho các bài toán phi tuyến phức tạp, hỗ trợ tối ưu hóa thiết kế và đánh giá độ tin cậy trong kỹ thuật kết cấu.

## KEYWORDS

Importance Sampling  
Simulation Sampling  
Steel Truss Structure  
Failure Probability  
Nonlinear  
Monte Carlo

## ABSTRACT

In the reliability analysis of nonlinear steel truss structures, simulation sampling methods such as Monte Carlo Simulation (MCS), Latin Hypercube Sampling (LHS), and Quasi-Monte Carlo Sampling (QMCS) often require a large number of samples to estimate low failure probabilities (below 0.1%), resulting in high computational costs. This paper proposes a combined framework integrating an advanced adaptive Importance Sampling technique (aEIS) with MCS, LHS, and QMCS to significantly reduce the required number of samples while maintaining accuracy. The framework leverages the mean-shifting and dynamic standard deviation adjustment mechanisms of aEIS, combined with the probabilistic space coverage capabilities of MCS, LHS, and QMCS. A case study on a planar 39-bar steel truss demonstrates that the combined framework, particularly QMCS-aEIS, achieves a significantly lower coefficient of variation (COV) compared to standard EIS, enabling a reduction in the number of samples while ensuring accuracy. These results provide an efficient solution for complex nonlinear problems, supporting optimization of design and reliability assessment in structural engineering.

## 1. Giới thiệu

Trong lĩnh vực kỹ thuật kết cấu, giàn thép đóng vai trò quan trọng trong các công trình xây dựng, cầu đường và kiến trúc hiện đại nhờ tính linh hoạt, tiết kiệm vật liệu và khả năng chịu lực cao. Chính vì vậy, rất nhiều nghiên cứu về dạng kết cấu này đã được thực hiện trong hơn hai mươi năm qua với nhiều đề tài khác nhau như: tính toán kết cấu [1-2], tối ưu hóa [3-5], ứng dụng trí tuệ nhân tạo trong kết cấu giàn [6-7], v.v. Tuy nhiên, việc tính toán kết cấu giàn thép thường gặp phải các đặc tính phi tuyến phức tạp từ hình học (như hiệu ứng dịch chuyển lớn và mất ổn định) và vật liệu (làm việc hiệu quả trên miền đàn dẻo), dẫn đến việc áp dụng các phương pháp tính toán trực tiếp (advanced analysis) đang được nghiên cứu và triển khai ngày càng rộng

rãi. Trong cách tiếp cận tính toán trực tiếp, ứng xử của công trình dưới tác động của tải trọng được mô phỏng qua rất nhiều bước tải nhỏ, từ đó toàn bộ ứng xử phi tuyến của hệ thống được tính toán một cách chính xác và toàn diện. Đồng thời, khả năng chịu tải lớn nhất của toàn bộ kết cấu cũng có thể được xác định một cách đáng tin cậy, đặc biệt khi tích hợp các yếu tố không chắc chắn như biến ngẫu nhiên trong tải trọng và vật liệu. Sự hư hỏng của công trình được đánh giá đồng thời trên toàn bộ hệ kết cấu, thay vì kiểm tra sự an toàn của từng cấu kiện riêng lẻ như các phương pháp tính toán truyền thống dựa trên hệ số an toàn. Nhờ những ưu điểm vượt trội này, các phương pháp tính toán trực tiếp không chỉ nâng cao độ chính xác mà còn hỗ trợ tối ưu hóa thiết kế, và chúng đã được áp dụng ngày càng nhiều trong thời gian gần đây, đặc biệt trong bối cảnh các công trình phức tạp đòi hỏi phân

\*Liên hệ tác giả: [truongviethung@tlu.edu.vn](mailto:truongviethung@tlu.edu.vn)

Nhận ngày 03/09/2025, sửa xong ngày 16/10/2025, chấp nhận đăng ngày 17/10/2025

Link DOI: <https://doi.org/10.54772/jomc.05.2025.1141>

tính độ tin cậy cao [8-10]. Tuy nhiên, hành vi của giàn thép phi tuyến thường bị ảnh hưởng bởi các yếu tố không chắc chắn như tải trọng ngẫu nhiên, đặc tính vật liệu biến thiên và sai lệch hình học, dẫn đến rủi ro hỏng hóc tiềm ẩn. Việc đánh giá độ tin cậy của các công trình này không chỉ giúp tối ưu hóa thiết kế mà còn đảm bảo an toàn và hiệu quả kinh tế. Theo các nghiên cứu gần đây, xác suất hỏng hóc của giàn thép có thể dao động từ  $10^{-3}$  đến  $10^{-6}$ , tùy thuộc vào mức độ phức tạp và điều kiện tải trọng, đòi hỏi các phương pháp phân tích chính xác và hiệu quả về mặt tính toán.

Theo cách thiết kế truyền thống, đánh giá độ tin cậy công trình dựa trên các phương pháp xác định (deterministic), sử dụng hệ số an toàn để bù đắp cho tính không chắc chắn. Tuy nhiên, cách tiếp cận này thường dẫn đến thiết kế dư thừa, tăng chi phí vật liệu và thi công. Để khắc phục, các phương pháp dựa trên xác suất (probabilistic) đã được phát triển, trong đó độ tin cậy được đo lường qua xác suất hỏng hóc (failure probability) dưới các biến ngẫu nhiên. Các kỹ thuật phổ biến bao gồm mô phỏng Monte Carlo (MCS) [11], phương pháp độ tin cậy bậc một (FORM) [12], phương pháp độ tin cậy bậc hai (SORM) [13], lấy mẫu quan trọng (IS) [14], lấy mẫu siêu lập phương Latin (LHS) và mô phỏng tập con (SS) [15]. MCS là phương pháp cơ bản, dựa trên việc lấy mẫu ngẫu nhiên để ước lượng xác suất, nhưng đòi hỏi số lượng mẫu lớn (thường lên đến  $10^6$ - $10^8$  cho xác suất nhỏ), dẫn đến chi phí tính toán khổng lồ, đặc biệt với cấu trúc phi tuyến yêu cầu phân tích không đàn hồi lặp lại. FORM và SORM sử dụng xấp xỉ tuyến tính hoặc bậc hai tại điểm thiết kế tối ưu, nhưng chúng kém chính xác với các hàm giới hạn trạng thái (limit state functions) phi tuyến cao độ, như trong giàn thép chịu tải trọng lớn gây chảy dẻo hoặc mất ổn định. Để cải thiện, các biến thể của IS và LHS đã được đề xuất. IS tập trung lấy mẫu quanh vùng hư hỏng bằng cách dịch chuyển phân bố lấy mẫu, qua đó cho phép giảm số lượng mẫu cần thiết. Tuy nhiên, hiệu quả của IS giảm khi số biến ngẫu nhiên tăng hoặc vùng hư hỏng phức tạp, khó xác định. LHS, một kỹ thuật lấy mẫu phân tầng, đảm bảo bao quát tốt không gian xác suất nhưng vẫn yêu cầu số mẫu lớn cho xác suất thấp. Gần đây, các kết hợp giữa IS và các phương pháp tạo mẫu như LHS đã chứng minh khả năng giảm phương sai, nhưng chúng chưa được tối ưu hóa hoàn toàn cho kết cấu phi tuyến như giàn thép, nơi phân tích nâng cao thường phải xem xét nhằm mô tả hiệu quả hiệu ứng phi tuyến và mất ổn định của công trình.

Trong bối cảnh đó, phương pháp lấy mẫu quan trọng hiệu quả (Efficient Importance Sampling - EIS) nổi lên như một công cụ mạnh mẽ, được các tác giả như Truong và Kim phát triển trong các nghiên cứu gần đây để cải tiến phương pháp lấy mẫu quan trọng (IS) truyền thống, nhằm xác định mật độ lấy mẫu hiệu quả hơn thông qua việc kết hợp các chiến lược thích ứng (adaptive) [16-18]. Cụ thể, trong bài báo năm 2017 [18] về phân tích độ tin cậy của cầu dây văng thép, các tác giả đề xuất EIS bằng cách sử dụng dữ liệu ban đầu từ các mẫu sơ bộ để dịch chuyển trung tâm lấy mẫu vào vùng hư hỏng, giảm đáng kể số lượng mẫu cần thiết so với IS thông thường trong khi vẫn duy trì độ chính xác cao cho các cấu trúc phi tuyến lớn. Tương tự, nghiên cứu năm 2018 về tối ưu hóa thiết kế dựa trên độ tin cậy của giàn thép không

đàn hồi phi tuyến đã tích hợp EIS với phương pháp lấy mẫu siêu lập phương Latin cải tiến (IHS) [16], giúp tối ưu hóa phân bố mẫu và giảm phương sai ước lượng xác suất hư hỏng, đặc biệt khi hàm giới hạn trạng thái không thể biểu diễn toán học rõ ràng do tính phức tạp của ứng xử phi tuyến của kết cấu. Đến năm 2020, trong đánh giá độ tin cậy của khung thép nửa cứng, EIS được cải tiến thêm bằng cách kết hợp với lấy mẫu phân tầng một phần Latin hóa (LPSS), cho phép xử lý tốt hơn không gian đa chiều và các xác suất hỏng hóc rất nhỏ, đồng thời tiết kiệm thời gian tính toán lên đến 50-80% so với IS đơn thuần nhờ khả năng bao quát vùng xác suất một cách hiệu quả. Tuy nhiên, EIS đơn lẻ vẫn gặp thách thức với các cấu trúc phi tuyến cao độ, nơi cần bổ sung các thuật toán lấy mẫu tiên tiến như IHS hoặc LPSS để tạo ra một khung mạnh mẽ, vừa giảm số lượng mẫu vừa nâng cao độ chính xác tổng thể.

Mặc dù các nghiên cứu của [16-18] đã mang lại những tiến bộ đáng kể trong việc áp dụng EIS để đánh giá độ tin cậy cấu trúc phi tuyến, chúng vẫn tồn tại một số nhược điểm nhất định, dẫn đến khoảng trống khoa học cần được lấp đầy trong nghiên cứu hiện tại. Cụ thể, trong bài báo [17] về phân tích độ tin cậy của cầu dây văng thép, EIS được đề xuất bằng cách sử dụng các mẫu sơ bộ từ IHS để ước lượng trung bình (mean) và phương sai (covariance) của vùng hư hỏng, sau đó dịch chuyển trung tâm lấy mẫu đến giá trị trung bình này trong khi giữ nguyên độ lệch chuẩn (std) gốc của phân bố xác suất. Tuy nhiên, cách tiếp cận này phụ thuộc lớn vào chất lượng của các mẫu sơ bộ; nếu vùng hỏng hóc đa mode hoặc phức tạp do các tải trọng kết hợp (như tĩnh tải, hoạt tải và tải trọng gió), việc ước lượng giá trị trung bình và độ lệch chuẩn có thể chưa chính xác, dẫn đến dịch chuyển không hiệu quả và số lượng mẫu vẫn còn lớn hơn mong đợi so với IS thông thường. Bên cạnh đó, phương pháp xác định giá trị trung bình để dịch chuyển được tính toán thông qua hệ số chịu tải (ultimate load factor) được xác định đồng thời cho toàn bộ tổ hợp tải trọng, mà không tách biệt cho từng loại tải (ví dụ: tải gió biến thiên mạnh), khiến EIS chưa tối ưu hóa cho các trường hợp tải trọng ngẫu nhiên độc lập. Tương tự, nghiên cứu năm 2018 về tối ưu hóa thiết kế dựa trên độ tin cậy của giàn thép không đàn hồi phi tuyến cũng sử dụng IHS-EIS với cơ chế dịch chuyển tương tự, nơi giá trị trung bình được lấy từ trung bình các mẫu khiến cho công trình hư hỏng và độ lệch chuẩn giữ nguyên, nhưng hiệu quả bị giảm khi hàm giới hạn trạng thái phi tuyến cao độ, dẫn đến lỗi ước lượng xác suất ở mức thấp ( $10^{-4}$  trở xuống) và chưa cải tiến được việc điều chỉnh độ lệch chuẩn động. Đến năm 2020, trong đánh giá độ tin cậy của khung thép nửa cứng, EIS được kết hợp với LPSS để cải thiện, với giá trị trung bình dịch chuyển dựa trên các mẫu phân tầng và độ lệch chuẩn điều chỉnh nhẹ dựa trên dữ liệu ban đầu, giúp xử lý tốt hơn xác suất hư hỏng nhỏ; tuy nhiên, việc tính hệ số chịu tải vẫn chủ yếu đồng thời cho tổ hợp tải trọng cường độ và khả năng sử dụng, mà chưa áp dụng tính toán lần lượt cho từng tải trọng riêng lẻ (như tải gió), dẫn đến dịch chuyển trung tâm lấy mẫu chưa đủ chính xác trong không gian đa chiều, đặc biệt khi các tải trọng có mức độ biến thiên khác nhau. Những hạn chế này cho thấy EIS được đề xuất trong [16-18], dù hiệu quả hơn IS thông thường nhờ giảm 50-80% số mẫu, vẫn chưa đạt tối

ưu do phụ thuộc vào ước lượng ban đầu và thiếu cơ chế thích ứng động cho việc điều chỉnh giá trị trung bình/độ lệch chuẩn dựa trên tính toán hệ số chịu tải riêng biệt.

Nghiên cứu này đề xuất cải tiến EIS bằng cách tính hệ số chịu tải lần lượt cho từng tải trọng (bắt đầu từ tải gió dễ biến thiên), từ đó ước lượng giá trị trung bình dịch chuyển chính xác hơn và điều chỉnh độ lệch chuẩn động, lấp đầy khoảng trống khoa học nhằm nâng cao hiệu quả cho đánh giá độ tin cậy của giàn thép phi tuyến. Thuật toán mới được đặt tên là aEIS (adaptive EIS). Sau đó, aEIS sẽ được kết hợp với các thuật toán lấy mẫu khác nhau như LHS, MCS bán phần (Quasi-MCS (QMCS)), v.v. nhằm tăng hiệu quả. Một giàn thép phẳng 39 thanh được nghiên cứu để đánh giá hiệu quả của khung đề xuất.

## 2. Xây dựng kỹ thuật lấy mẫu quan trọng nâng cao tự thích ứng (aEIS)

### 2.1. Kỹ thuật lấy mẫu quan trọng nâng cao EIS

Trong kỹ thuật lấy mẫu quan trọng nâng cao (Efficient Importance Sampling - EIS), hàm trạng thái giới hạn (limit state function) của công trình chịu tải trọng khi sử dụng phân tích trực tiếp được xây dựng dựa trên khái niệm hệ số chịu tải (load factor), nhằm phản ánh khả năng chịu lực tổng thể của hệ kết cấu phi tuyến. Cụ thể, hàm trạng thái giới hạn được biểu diễn như sau:

$$G(X) = l_f(X) - 1 \leq 0 \quad (1)$$

Trong đó  $X = (y_1, \dots, y_l, x_1, \dots, x_m)$  là vec-tơ biến ngẫu nhiên của hệ công trình với  $y_l$  là biến ngẫu nhiên liên quan đến kích thước hình học của công trình và đặc tính vật liệu (như diện tích tiết diện, mô-đun đàn hồi, cường độ chảy dẻo) và  $x_i$  là biến ngẫu nhiên của tải trọng (như tĩnh tải, hoạt tải, tải gió);  $l_f(X)$  là hệ số chịu tải lớn nhất của công trình được xác định theo tải trọng tác dụng P. Hệ số  $l_f(X)$  được tính toán như sau: Trạng thái chịu tải của công trình khi chịu các tải trọng danh nghĩa  $P_n \neq P$  được xác định trước (quá trình tính toán dừng lại khi các tải trọng  $P_n$  đạt 100% độ lớn của tải), sau đó trạng thái làm việc của hệ công trình lại tiếp tục chịu tải trọng P tăng dần cho đến khi hư hỏng và điểm hư hỏng đó sẽ là tương ứng với giá trị  $l_f(X)$ . Sự kiện hư hỏng xảy ra khi  $g(X) \leq 0$ , tức  $l_f(X) \leq 1$ .

Dựa trên kỹ thuật lấy mẫu quan trọng (IS) cơ bản, xác suất hỏng hóc của công trình được xác định như sau:

$$P_f = P[G(X) \leq 0] = \int I[G(X) \leq 0] h_p(X) \frac{f_p(X)}{h_p(X)} dX \quad (2)$$

Trong đó  $f_p(X)$  là hàm mật độ xác suất (PDF) gốc của X;  $h_p(X)$  là hàm mật độ xác suất lấy mẫu quan trọng (IS PDF), được thiết kế để tập trung vào vùng hư hỏng;  $I[\cdot]$  là hàm chỉ thị (bằng 1 nếu điều kiện đúng, 0 nếu sai).

Xác suất hỏng hóc được ước lượng gần đúng bằng cách sử dụng N mẫu từ  $h_p(X)$ :

$$P_{f,IS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(X_i) \leq 0] \frac{f_p(X_i)}{h_p(X_i)} \quad (3)$$

Trong đó:  $X_i$  là các mẫu được tạo ra từ  $h_p(X)$  và trọng số  $\frac{f_p(X_i)}{h_p(X_i)}$  điều chỉnh để đảm bảo ước lượng không thiên vị.

Để xây dựng  $h_p(X)$  trong EIS, các nghiên cứu trước đây [16-18] sử dụng một quá trình hai giai đoạn thích ứng. Đầu tiên, các giá trị

trung bình của các biến được sử dụng để xác định hệ số chịu tải trọng tương ứng trong trường hợp tất cả các tải tác dụng đồng thời  $l_f$ . Sau đó, hệ số  $l_f$  này được sử dụng để ước lượng giá trị trung bình của vùng hư hỏng:  $\mu_h = l_f \times P_v$  và độ lệch chuẩn của  $h_p(X)$  thường được giữ nguyên bằng độ lệch chuẩn gốc của phân bố xác suất (ví dụ: nếu biến ngẫu nhiên theo phân bố chuẩn, độ lệch chuẩn giữ nguyên giá trị ban đầu), hoặc chỉ điều chỉnh nhẹ dựa trên dữ liệu sơ bộ mà không có cơ chế động. Trung tâm lấy mẫu được dịch chuyển đến  $\mu_h$  trong khi độ lệch chuẩn giữ nguyên để tránh co hẹp vùng lấy mẫu quá mức, dẫn đến thiên vị. Điều này giúp EIS giảm số lượng mẫu chính thức cần thiết so với IS thông thường, vì mật độ  $h_p(X)$  tập trung hơn vào vùng  $P_f$  nhỏ.

Công thức (2) và (3) cho thấy để tính toán  $P_{f,IS}$ , cần N lần phân tích kết cấu phi tuyến, giá trị này không phụ thuộc vào cách tạo mẫu của  $h_p(X)$ . Nếu các giá trị của  $l_{fi}$  đã biết từ N lần phân tích kết cấu phi tuyến, thì ước lượng  $P_{f,IS}$  chỉ phụ thuộc vào N giá trị tạo mẫu từ  $P_n$  trọng số của các mẫu hư hỏng. Trên cơ sở đó, sai số khi tính  $P_{f,IS}$  có thể giảm thiểu bằng cách lặp lại nhiều lần quá trình tạo N giá trị tạo mẫu từ  $P_n$ . Lúc này, xác suất hỏng hóc của công trình được xác định như sau:

$$P_{f,EIS} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P_{f,IS}^j \quad (5)$$

Trong đó  $P_{f,IS}^j$  tương ứng với lần tạo mẫu thứ j của N mẫu từ  $P_n$  và k là hệ số lặp trong EIS.

### 2.2. Đề xuất kỹ thuật lấy mẫu quan trọng nâng cao tự thích ứng aEIS

Mặc dù EIS mang lại hiệu quả cao nhờ cơ chế thích ứng này, nó vẫn tồn tại một số hạn chế cần chỉ ra để dẫn đến cải tiến. Thứ nhất, hiệu quả của EIS phụ thuộc lớn vào chất lượng ước lượng  $\mu_h$  và độ lệch chuẩn. Nếu vùng hư hỏng phức tạp do tương tác phi tuyến giữa các biến, ước lượng  $\mu_h$  có thể lệch khỏi trung tâm thực sự, dẫn đến dịch chuyển không tối ưu và số lượng mẫu vẫn còn cao. Thứ hai, việc giữ nguyên độ lệch chuẩn gốc hoặc điều chỉnh nhẹ mà không có cơ chế động có thể làm cho mật độ IS quá rộng hoặc quá hẹp, tăng phương sai ước lượng, đặc biệt ở xác suất thấp. Thứ ba, trong tính toán  $l_f$ , các nghiên cứu trước thường xác định hệ số chịu tải đồng thời cho toàn bộ tổ hợp tải trọng, mà không tách biệt tính toán lần lượt cho từng loại tải, ví dụ bắt đầu từ tĩnh tải biến thiên nhỏ rồi đến hoạt tải và tải trọng gió biến thiên mạnh. Điều này làm giảm độ chính xác của  $\mu_h$  dịch chuyển trong không gian đa chiều, nơi các tải trọng có mức độ biến thiên khác nhau, dẫn đến EIS chưa đạt tối ưu cho kết cấu giàn thép phi tuyến phức tạp. Những hạn chế này tạo cơ sở cho việc phát triển aEIS (adaptive EIS) trong nghiên cứu này, với cải tiến tập trung vào ước lượng  $\mu_h$  và độ lệch chuẩn một cách tự động, thích ứng với điều kiện ban đầu của bài toán.

Cụ thể, quá trình xây dựng hàm mật độ lấy mẫu quan trọng  $h_p(X)$  trong aEIS được thực hiện lần lượt như sau:

Bước 1: Lựa chọn tải trọng mục tiêu P dùng trong tính toán  $P_f$ . Tải trọng P được lựa chọn trong các tải trọng tác dụng lên công trình với đặc điểm là có độ lệch chuẩn lớn vì đặc điểm này khiến nó có ảnh hưởng lớn đến tính biến thiên của  $P_f$ . Đối với công trình, tải trọng hoạt tải và tải trọng gió thường có tính biến thiên lớn (tính biến thiên của

tải trọng gió thường là lớn hơn hoạt tải), nên 2 loại tải trọng này ưu tiên sử dụng.

Bước 2: Xác định  $l_{fp}$  bằng quá trình 2 bước: Bước 1: Sử dụng giá trị trung bình cho tất cả biến ngẫu nhiên và áp dụng các tải trọng trừ P lên đến 100 % giá trị trung bình, sử dụng phân tích phi tuyến trực tiếp để xác định trạng thái cân bằng ban đầu của kết cấu; Bước 2: tiếp tục tăng dần tải trọng P từ 0 cho đến khi đạt điểm hư hỏng, từ đó tính được hệ số chịu tải riêng cho  $P$   $l_{fp} = W_{ult} / W_n$ , trong đó  $W_{ult}$  là được xem là khả năng chịu tải của công trình xác định theo tải trọng P. Giá trị trung bình dịch chuyển cho biến ngẫu nhiên tải trọng P được xác định như sau:

$$\mu_h = l_{fp} \times W_n \quad (6)$$

Đối với các biến khác  $\mu_h$  được giữ nguyên giá trị trung bình gốc. Cách tiếp cận lần lượt này (sequential load factoring) đảm bảo tính toán  $l_{fp}$  phản ánh đúng tính độc lập của tải trọng, khắc phục hạn chế của phương pháp đồng thời trong [16-18], nơi tương tác tải trọng bị bỏ qua dẫn đến giá trị trung bình có thể lệch khỏi vùng hư hỏng của kết cấu.

Bước 3: Xác định độ lệch chuẩn  $\sigma_h$  một cách tự động dựa trên phân bố chuẩn tắc (Z-table) và giá trị xác suất hư hỏng dự báo của công trình  $P_{f,0}$ . Giả sử vùng hỏng hóc gần với đuôi phải của phân bố (tail distribution), tìm giá trị Z tương ứng với xác suất  $P_{f,0}$  ở một phía (one-tailed). Ví dụ, nếu  $P_{f,0} = 0,001$  (0,1%),  $Z \approx 3,09$  (từ bảng Z cho xác suất 0,001 ở đuôi phải). Độ lệch chuẩn của hàm IS cho biến tải trọng P được điều chỉnh động như sau:

$$\sigma_{h,P} = Z \times \sigma_P \quad (7)$$

trong đó  $\sigma_{gio}$  là độ lệch chuẩn gốc của tải trọng P (từ phân bố xác suất ban đầu).

Bước 4: Xây dựng  $h_P(X)$  với giá trị trung bình và độ lệch chuẩn xác định ở bước 2 và 3, ước lượng  $P_f$  theo phương pháp EIS ở trên.

### 3. Xây dựng khung kết hợp giữa aEIS và các phương pháp lấy mẫu mô phỏng

#### 3.1. Tóm lược nguyên lý các phương pháp lấy mẫu mô phỏng

##### 3.1.1. Mô phỏng Monte Carlo (MCS)

MCS là phương pháp cơ bản nhất, được đề xuất từ những năm 1940 trong các nghiên cứu vật lý hạt nhân và sau đó áp dụng rộng rãi trong kỹ thuật độ tin cậy. Nguyên lý của MCS dựa trên định luật số lớn (law of large numbers), sử dụng các mẫu ngẫu nhiên độc lập từ phân bố xác suất gốc để mô phỏng hành vi hệ thống. Quá trình thực hiện MCS bao gồm các bước sau:

Xác định biến ngẫu nhiên: Mô hình hóa các biến  $X = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  với phân bố xác suất phù hợp (ví dụ: normal cho đặc tính vật liệu, lognormal cho tải trọng, Gumbel cho tải gió cực đại).

➤ Tạo mẫu ngẫu nhiên: Sử dụng trình tạo số ngẫu nhiên để tạo N mẫu  $X_i$  từ  $f_X(X)$ .

➤ Đánh giá LSF: Với mỗi mẫu  $X_i$ , thực hiện phân tích kết cấu phi tuyến để tính  $g(X_i)$ .

➤ Ước lượng  $P_f$ :  $P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(X_i) \leq 0]$  trong đó  $I[g(X_i) \leq 0]$  là hàm chỉ thị (bằng 1 nếu công trình hư hỏng và bằng 0 nếu không). Để ước lượng phương sai, lặp MCS nhiều lần và tính hệ số biến thiên

COV. COV cũng có thể ước lượng gần đúng theo công thức  $COV \approx$

$$\sqrt{\frac{(1-P_f)}{(NP_f)}}$$

Ưu điểm của MCS là đơn giản, không thiên vị và chính xác với N lớn, không yêu cầu LSF phải khả vi hoặc tuyến tính. Tuy nhiên, nhược điểm lớn là hiệu quả thấp với  $P_f$  nhỏ: Để đạt  $COV \approx 0,1$  với  $P_f = 10^{-4}$  cần  $N \approx 10^6$ , dẫn đến chi phí tính toán cao do mỗi đánh giá LSF đòi hỏi phân tích phi tuyến tốn kém.

##### 3.1.2. Lấy mẫu siêu lập phương Latin (LHS)

LHS là kỹ thuật lấy mẫu phân tầng (stratified sampling) được phát triển bởi McKay và cs. [19] và cải tiến bởi Iman và cs. [20] để giảm phương sai so với MCS. Nguyên lý của LHS là phân chia không gian xác suất thành các khoảng đều xác suất, đảm bảo mỗi chiều của biến ngẫu nhiên được đại diện đầy đủ, tránh tình trạng lấy mẫu tập trung hoặc bỏ sót vùng như trong MCS ngẫu nhiên thuần túy.

Quá trình thực hiện LHS như sau:

➤ Phân tầng không gian: Với d biến ngẫu nhiên và N mẫu, chia CDF của mỗi biến  $x_k$  thành N khoảng đều xác suất  $1/N$ . Đối với biến thứ k, các khoảng là  $[(j-1)/N, j/N]$  cho  $j = 1, \dots, N$ .

➤ Tạo mẫu trong tầng: Trong mỗi khoảng, lấy một giá trị ngẫu nhiên (thường ở giữa khoảng để giảm phương sai:  $x_{kj} = F_k^{-1}((j - 0,5)/N)$ ), tạo ma trận  $N \times d$  với các cột là hoán vị ngẫu nhiên của các giá trị trong tầng để giảm tương quan giữa biến.

➤ Giảm tương quan (nếu cần): Sử dụng phương pháp Cholesky để điều chỉnh ma trận mẫu sao cho phù hợp với ma trận hiệp phương sai mong muốn.

➤ Đánh giá và ước lượng: Tương tự MCS, tính  $g(X_i)$  và  $P_f$ .

LHS giảm phương sai ước lượng khoảng  $O(1/N^2)$  ở một số trường hợp, tốt hơn  $O(1/N^2)$  của MCS, nhờ bao quát đều không gian xác suất. LHS hiệu quả khi số biến d nhỏ đến trung bình ( $d < 20$ ), giúp giảm N từ 2-10 lần so với MCS để đạt cùng độ chính xác. Tuy nhiên, LHS vẫn yêu cầu N lớn cho  $P_f$  rất nhỏ và kém hiệu quả nếu vùng hư hỏng tập trung ở đuôi phân bố, vì không có cơ chế thích ứng.

##### 3.1.3. Mô phỏng Monte Carlo bán phần (QMCS)

QMCS được giới thiệu bởi Sobol [21] và Halton [22], sử dụng dãy số bán ngẫu nhiên (quasi-random) thay vì giả ngẫu nhiên (pseudo-random) như trong MCS và LHS để đạt hội tụ nhanh hơn. Nguyên lý của QMCS là tạo các điểm mẫu có tính đồng đều cao (low discrepancy), đo lường bằng chỉ số discrepancy (sai lệch so với phân bố đồng nhất lý tưởng), giúp bao phủ không gian xác suất tốt hơn MCS. Các dãy bán ngẫu nhiên phổ biến:

➤ Dãy Halton: Dựa trên cơ sở nguyên tố, tạo điểm bằng cách đảo cơ sở cho từng chiều.

➤ Dãy Sobol: Sử dụng ma trận hướng (direction numbers) để tạo dãy nhị phân, hiệu quả cho không gian chiều cao ( $d \leq 40$ ).

➤ Dãy Niederreiter: Tương tự Sobol nhưng tối ưu hóa thêm.

Quá trình QMCS:

➤ Tạo dãy quasi-random: Tạo  $N$  điểm đồng nhất  $u_i \in [0,1]^d$  từ dãy (ví dụ: Sobol).

➤ Chuyển đổi sang phân bố thực: Áp dụng  $x_{k,j} = F_k^{-1}(u_{k,j})$  cho từng chiều  $k$ .

➤ Đánh giá LSF và ước lượng: Tương tự như trong MCS và LHS, nhưng phương sai giảm với tốc độ  $O((\log N)^d / N)$ , tốt hơn MCS.

QMCS vượt trội trong các bài toán tích phân đa chiều, giảm  $N$  từ 10-100 lần so với MCS để đạt độ chính xác tương đương, đặc biệt cho  $P_f$  không quá nhỏ. Nhược điểm là chi phí tạo dãy cao hơn và hiệu quả giảm ở chiều rất cao ( $d > 100$ ).

Tóm lại, MCS cung cấp nền tảng đơn giản nhưng đòi hỏi nhiều mẫu nên thời gian tính toán lâu. LHS cải thiện bằng phân tầng để bao quát đều hơn qua đó giảm số lượng mẫu so với MCS. QMCS nâng cao hội tụ nhờ đồng đều bán ngẫu nhiên. Trong khung đề xuất, các phương pháp này sẽ được kết hợp với aEIS để tận dụng ưu điểm, giảm số mẫu cho phân tích độ tin cậy giàn thép phi tuyến.

### 3.2. Khung kết hợp aEIS và các phương pháp lấy mẫu mô phỏng

Để tận dụng ưu điểm của kỹ thuật lấy mẫu quan trọng nâng cao tự thích ứng (aEIS) trong việc tập trung vào vùng hư hỏng hiếm gặp và khả năng bao quát đều không gian xác suất của các phương pháp lấy mẫu mô phỏng (MCS, LHS, QMCS), nghiên cứu này đề xuất một khung kết hợp linh hoạt, nhằm giảm đáng kể số lượng mẫu cần thiết và thời gian tính toán trong phân tích độ tin cậy của giàn thép phi tuyến. Khung này hoạt động theo nguyên tắc hai giai đoạn: (1) Áp dụng aEIS để xây dựng hàm mật độ lấy mẫu quan trọng  $h_p(X)$  đồng, dịch chuyển trung tâm và điều chỉnh độ lệch chuẩn, (2) Sử dụng phương pháp lấy mẫu mô phỏng để tạo tập mẫu để ước lượng  $P_f$ . Việc kết hợp này không chỉ giảm phương sai ước lượng mà còn thích ứng tốt với tính phi tuyến của hàm giới hạn trạng thái  $G(X)$ .

Khung kết hợp được thiết kế tổng quát để áp dụng với bất kỳ phương pháp lấy mẫu mô phỏng nào (MCS, LHS hoặc QMCS), tùy thuộc vào đặc trưng bài toán: MCS phù hợp cho bài toán đơn giản với chiều thấp; LHS cho trường hợp cần giảm tương quan biến; QMCS cho không gian đa chiều với hội tụ nhanh. Quy trình chung của khung bao gồm các bước sau:

Bước (1): Xác định biến ngẫu nhiên cho bài toán, trong đó  $X = (y_1, \dots, y_l, x_1, \dots, x_m)$ , với  $y_i$  là biến liên quan đến đặc tính cấu trúc (hình học, vật liệu) và  $x_i$  là biến tải trọng (tĩnh tải DL, hoạt tải LL, tải gió W). Chọn  $x_m$  (lưu ý rằng có thể chọn bất kỳ tải trọng nào khác mà người sử dụng thấy tải trọng đó có tính ngẫu nhiên mạnh ảnh hưởng đến công trình), và ký hiệu tổng quát là tải trọng  $P$ , là biến xác suất áp dụng phương pháp aEIS.

Bước (2): Áp dụng aEIS để xây dựng hàm phân bố xác suất lấy mẫu quan trọng  $h_p(X)$  sử dụng quy trình lần lượt của aEIS (sequential load factoring): Áp các tải trọng (trừ  $P$ ) đến 100% giá trị danh nghĩa, sau đó tăng  $P$  đến phá hoại để tính  $l_f$ ; xác định trung bình dịch chuyển

$\mu_h = l_f \times W_n$ ; tìm  $Z$  từ bảng  $Z$  dựa trên  $P_{f,0}$  và điều chỉnh  $\sigma_{h,P} = Z \times \sigma_P$ . Các tham số cho biến khác được giữ nguyên.

Bước (3): Tạo  $N$  mẫu từ  $(y_1, \dots, y_l, x_1, \dots, x_{m-1})$  bằng các phương pháp lấy mẫu mô phỏng.

Bước (4): Xác định khả năng chịu tải của công trình  $R_p^i (i = 1, \dots, N)$ .

Bước (5): Thực hiện  $k$  lần lặp việc tạo  $N$  mẫu  $W$  và ước lượng  $P_{f,j}$  theo IS cho mỗi lần lặp  $j = 1, \dots, k$ .

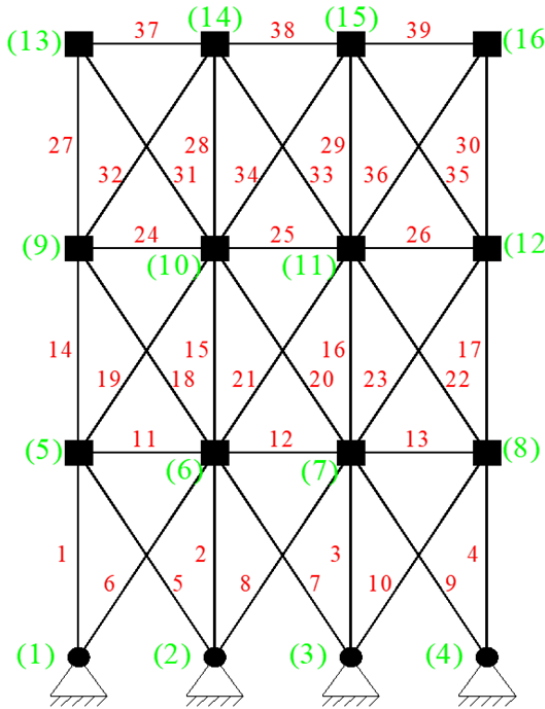
Bước (6): Xác định xác suất hỏng hóc cuối cùng  $P_f = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P_{f,j}$ .

## 4. Ví dụ áp dụng: Giàn phẳng 39 thanh

Trong phần này, một giàn thép phẳng có 39 thanh như Hình 1 được sử dụng để đánh giá hiệu quả của phương pháp được đề xuất. Biến ngẫu nhiên được xem xét gồm mô-đun đàn hồi và ứng suất dẻo của vật liệu thép, 39 diện tích tiết diện của 39 thanh giàn và 3 tải trọng (tĩnh tải, hoạt tải, tải trọng gió). Thông tin chi tiết của 44 biến ngẫu nhiên này được cho trong Bảng 1, trong đó giá trị danh định của 39 thanh giàn được lấy là (2700, 200, 800, 5500, 800, 3500, 5500, 300, 5500, 200, 1800, 2400, 2700, 800, 300, 800, 2400, 800, 2700, 3500, 300, 3500, 200, 800, 1400, 1800, 200, 200, 300, 300, 1400, 800, 2400, 200, 1800, 200, 300, 800, 1400) mm<sup>2</sup> với ký hiệu số thanh được cho trong Hình 1. Tải trọng được quy về tải trọng nút và được đặt ở toàn bộ 16 nút, trong đó tải trọng gió có phương nằm ngang. Tổ hợp tải trọng được xem xét là (1,2DL + 0,5LL + 1,6W). Chọn hoạt tải là biến xác suất  $P$  dùng để đánh giá hiệu quả của phương pháp được đề xuất.

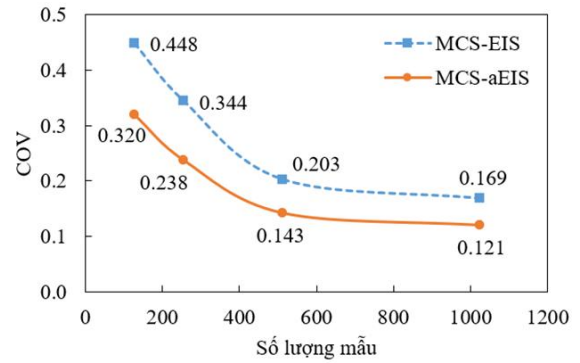
Để xác định xác suất hư hỏng của kết cấu, phương pháp MCS được thực hiện với số mẫu là 1 triệu mẫu. Kết quả thu được là 3,523E-04 được xem là xác suất phá hủy chính xác của công trình để sử dụng đánh giá độ chính xác của các thuật toán. EIS và aEIS được kết hợp với cả MCS, LHS và QMCS với hệ số  $k$  lấy bằng 100 với mỗi thuật toán được chạy độc lập 50 lần để đánh giá sự ổn định. Với xác suất hư hỏng  $P_f = 3,523E-04$ , sai số COV khi lấy cỡ mẫu là  $N = 1000$  được ước lượng gần đúng là:  $COV = \sqrt{\frac{1-P_f}{N \cdot P_f}} \approx 1,685 = 168,5\%$ . Đây là một giá trị quá lớn so với hiệu suất của các thuật toán có sử dụng EIS và aEIS. Do vậy, trong các kết quả trình bày sau đây, hiệu suất của các thuật toán mô phỏng MCS, LHS và QMCS sẽ không được đánh giá. Bốn cỡ mẫu được sử dụng để tính toán là  $N = 128, 256, 512$  và 1024.

Bảng 2 trình bày kết quả giá trị trung bình của  $P_f$  thu được từ nhiều lần chạy khác nhau của các thuật toán. Ta có thể thấy rằng, cả 6 thuật toán MCS-EIS, MCS-aEIS, LHS-EIS, LHS-aEIS, QMCS-EIS, và QMCS-aEIS có kết quả ước lượng trung bình của  $P_f$  sau 50 lần chạy rất sát với kết quả xác suất hư hỏng chính xác  $P_f = 3,523E-04$  mà ta đã xác định ở trên. Điều này cho thấy rằng cả 6 thuật toán đều đảm bảo độ chính xác khi ước lượng giá trị  $P_f$  khi số lượng mẫu đủ lớn.

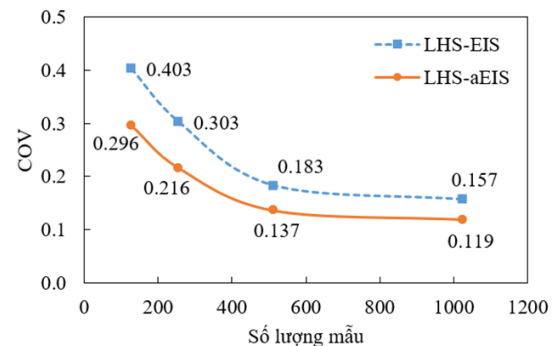


Hình 1. Giàn thép phẳng gồm 39 thanh.

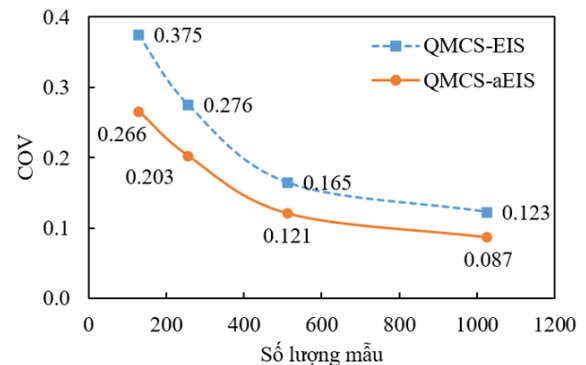
Hình 2 đến Hình 4 trình bày so sánh trực tiếp hiệu suất của các thuật toán thông qua chỉ số COV, phản ánh khả năng giảm số lượng mẫu cần thiết. Hình 2 minh họa sự so sánh hiệu suất giữa aEIS và EIS khi kết hợp với MCS. Lưu ý rằng việc kết hợp với MCS tương đương với việc áp dụng EIS và aEIS độc lập. Kết quả cho thấy COV của MCS-aEIS thấp hơn đáng kể so với MCS-EIS; cụ thể, tại cỡ mẫu 128, COV của MCS-aEIS là 0.320, trong khi của MCS-EIS là 0.448. Hình 3 thể hiện so sánh giữa LHS-EIS và LHS-aEIS. Tương tự, LHS-aEIS đạt COV thấp hơn đáng kể so với LHS-EIS; ví dụ, tại cỡ mẫu 256, COV của LHS-EIS là 0,303; trong khi của LHS-aEIS chỉ là 0,216. Hình 4 khẳng định thêm hiệu suất vượt trội của aEIS khi kết hợp với QMCS so với EIS, với COV của QMCS-aEIS là 0.087 tại cỡ mẫu 1024, thấp hơn so với 0.123 của QMCS-EIS. Các kết quả này chứng minh hiệu quả cao hơn của aEIS so với EIS, thông qua việc giảm số lượng mẫu cần thiết để ước lượng  $P_f$ . Kết hợp các kết quả từ Hình 2-4, khi tích hợp với EIS và aEIS, hiệu suất của QMCS vượt trội hơn LHS, và LHS vượt trội hơn MCS. Điều này cung cấp cơ sở cho việc ưu tiên kết hợp QMCS với EIS và aEIS trong các nghiên cứu tiếp theo.



Hình 2. So sánh COV giữa MCS-EIS và MCS-aEIS cho giàn phẳng 39 thanh.



Hình 3. So sánh COV giữa LHS-EIS và LHS-aEIS cho giàn phẳng 39 thanh.



Hình 4. So sánh COV giữa QMCS-EIS và QMCS-aEIS cho giàn phẳng 39 thanh.

Bảng 1. Biến ngẫu nhiên trong giàn thép phẳng 39 thanh.

| Loại                | Biến ngẫu nhiên | Giá trị danh nghĩa | Trung bình/ Danh nghĩa | COV   | Dạng phân bố |
|---------------------|-----------------|--------------------|------------------------|-------|--------------|
| Mô đun đàn hồi      | $E$             | 200 (GPa)          | 0,993                  | 0,06  | Lognormal    |
| Ứng suất chảy       | $F_y$           | 344,5 (MPa)        | 1,10                   | 0,034 | Lognormal    |
| Diện tích tiết diện | $A_i$           | -                  | 1,00                   | 0,10  | Normal       |
| Tĩnh tải            | $DL$            | 40 (KN)            | 1,05                   | 0,10  | Normal       |
| Hoạt tải            | $LL$            | 40 (KN)            | 1,00                   | 0,25  | Gumbel       |
| Tải trọng gió       | $W$             | 38 (KN)            | 0,92                   | 0,25  | Gumbel       |

**Bảng 2.** Giá trị trung bình của  $P_f$  cho giàn thép 39 thanh.

| Cỡ mẫu    | 128       | 256       | 512       | 1024      |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| MCS-EIS   | 3,509E-04 | 3,534E-04 | 3,523E-04 | 3,521E-04 |
| MCS-aEIS  | 3,353E-04 | 3,523E-04 | 3,534E-04 | 3,508E-04 |
| LHS-EIS   | 3,527E-04 | 3,512E-04 | 3,544E-04 | 3,509E-04 |
| LHS-aEIS  | 3,522E-04 | 3,531E-04 | 3,519E-04 | 3,526E-04 |
| QMCS-EIS  | 3,531E-04 | 3,519E-04 | 3,516E-04 | 3,542E-04 |
| QMCS-aEIS | 3,572E-04 | 3,514E-01 | 3,525E-04 | 3,549E-04 |

## 5. Kết luận

Nghiên cứu này đã đề xuất một khung kết hợp giữa kỹ thuật lấy mẫu quan trọng nâng cao tự thích ứng (aEIS) và các phương pháp lấy mẫu mô phỏng (MCS, LHS, QMCS) nhằm nâng cao hiệu quả phân tích xác suất hư hỏng của kết cấu giàn thép phi tuyến. Phương pháp aEIS đã cải tiến EIS thông qua tính toán hệ số chịu tải lần lượt cho từng tải trọng và điều chỉnh độ lệch chuẩn động dựa trên phân bố chuẩn tắc. Áp dụng trên giàn thép phẳng 39 thanh với xác suất hư hỏng tham chiếu  $3523\text{E-}04$ , các kết quả cho thấy khung kết hợp, đặc biệt QMCS-aEIS, đạt COV thấp hơn đáng kể so với EIS, giảm số lượng mẫu cần thiết để duy trì độ chính xác, từ đó tối ưu hóa thời gian tính toán cho các bài toán phi tuyến phức tạp.

Khung đề xuất không chỉ nâng cao độ tin cậy trong thiết kế kết cấu mà còn mở rộng ứng dụng thực tiễn, hỗ trợ tối ưu hóa và đánh giá rủi ro cho các công trình dân dụng. Hướng phát triển tiếp theo có thể tập trung vào tích hợp khung này với các thuật toán học máy để dự đoán vùng hư hỏng tự động, mở rộng đến các loại kết cấu khác như khung thép hoặc nhà dân dụng hoặc các công trình cầu, và kết hợp với phân tích nhạy cảm để xử lý không gian biến ngẫu nhiên đa chiều cao hơn, nhằm nâng cao tính khả thi trong các kết cấu lớn.

## Tài liệu tham khảo

- [1]. Feng, J., Sun, Y., Xu, Y., Wang, F., Zhang, Q., & Cai, J. (2021). Robustness Analysis and Important Element Evaluation Method of Truss Structures. *Buildings*, 11(10), 436.
- [2]. Liu, F., Jin, D., Li, X. et al. (2024) Reduced-order modeling and solution method for nonlinear frequency response analysis of large space truss structures. *Nonlinear Dyn* 112, 10127–10145.
- [3]. Cao, T. S., Pham, H. A., Truong, V. H. (2024). An efficient algorithm for multi-objective structural optimization problems using an improved pbest-based differential evolution algorithm. *Advances in Engineering Software* 197, 103752.
- [4]. Truong, V. H., Pham, H. A., Tangaramvong, S. (2025). An efficient method for nonlinear inelastic truss optimization based on improved k-nearest neighbor comparison and Rao algorithm. *Structures* 71, 108158.
- [5]. Truong, V. H., Tangaramvong, S., Pham, H. A., Nguyen, M.C., Su, R. (2025). An efficient archive-based parameter-free multi-objective Rao-DE algorithm for bi-objective optimization of truss structures. *Computers & Structures* 308, 107647.
- [6]. Truong, V. H., Pham, H. A. (2021). Support Vector Machine for Regression of Ultimate Strength of Trusses: A Comparative Study. *Engineering Journal* 25(7), 157-166.
- [7]. Nguyen, H.H., Truong, V. H. (2024). Machine Learning-based prediction of seismic lateral deflection of steel trusses using nonlinear time-history analysis. *Structures* 69, 107369.
- [8]. Truong, V. H., Cao, T. S., Tangaramvong, S. (2024) A robust machine learning-based framework for handling time-consuming constraints for bi-objective optimization of nonlinear steel structures. *Structures* 2024, 62, 106226.
- [9]. Truong, V. H., Ha, M.H., Pham, H.A., Tran, D.H. (2020). Optimization of steel moment frames with panel-zone design using an adaptive differential evolution. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (JSTCE)-HUCE* 14(2), 65-75.
- [10]. Vu, Q.A., Cao, T.S., Nguyen, H.H., Truong, V.H., Ha, M.H. (2023). An efficient differential evolution-based method for optimization of steel frame structures using direct analysis. *Structures* 51, 67-78.
- [11]. Kroese, D. P., Brereton, T., Taimre, T., Botev, Z. I. (2014). Why the Monte Carlo method is so important today. *WIREs Comput Stat.* 6 (6), 386–392.
- [12]. Hasofer, A. M., Lind, N. C. (1974). An Exact and Invariant First Order Reliability Format. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division* 100, 111-121.
- [13]. Hu, Z., Mansour, R., Olsson, M. et al. (2021) Second-order reliability methods: a review and comparative study. *Struct Multidisc Optim* 64, 3233–3263.
- [14]. Kahn, H., Harris, T. E. (1949). Estimation of Particle Transmission by Random Sampling. *Monte Carlo Method. Applied Mathematics Series*. 12. National Bureau of Standards.: 27–30.
- [15]. Zhao, Y., Wang, Z. (2022) Subset simulation with adaptable intermediate failure probability for robust reliability analysis: an unsupervised learning-based approach. *Struct Multidisc Optim* 65, 172.
- [16]. Truong, V. H., Kim, S.E. (2018). Reliability-based design optimization of nonlinear inelastic trusses using improved differential evolution algorithm. *Advances in Engineering Software* 121, 59-74.
- [17]. Kim, S.E., Truong, V. H. (2020). Reliability Evaluation of Semirigid Steel Frames Using Advanced Analysis. *Journal of Structural Engineering* 146(5), 04020064.
- [18]. Truong, V. H., Kim, S.E. (2017). An efficient method of system reliability analysis of steel cable-stayed bridges. *Advances in Engineering Software* 114, 295-311.
- [19]. McKay, M.D., Beckman, R.J., Conover, W.J. (1979). A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. *Technometrics*. 21 (2). American Statistical Association: 239–245.

- [20]. Iman, R.L., Helton, J.C., Campbell, J.E. (1981). An approach to sensitivity analysis of computer models, Part 1. Introduction, input variable selection and preliminary variable assessment. *Journal of Quality Technology* 13 (3), 174–183.
- [21]. Sobol', I.M. (1967) On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *Comput. Math. Math. Phys.* 7, 86–112.
- [22]. Holton, J.H. (1960) On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. *Numer. Math* 2, 84–90.