

# Ứng dụng VBA Excel phân tích nội lực dầm phẳng bằng phương pháp ma trận

Khúc Thiên Thanh <sup>1,2\*</sup>, Kiều Trần Thu Ngân <sup>2</sup>, Đoàn Công Đức <sup>2</sup>, Vũ Hồ Nam <sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Viện sau Đại Học, Trường Đại Học Văn Lang, TP. Hồ Chí Minh

<sup>2</sup> Khoa Xây dựng, Trường Đại Học Văn Lang, TP. Hồ Chí Minh

**TỪ KHOÁ**

VBA Excel  
MSA  
FEM  
Dầm phẳng  
Phản lực

**TÓM TẮT**

Một công cụ tính toán dầm phẳng đơn giản được xây dựng trên nền tảng Excel bằng VBA dựa theo phương pháp ma trận (Matrix Structural Analysis – MSA). Phương pháp này mô tả mối quan hệ giữa lực nút, chuyển vị nút và độ cứng của kết cấu thông qua hệ phương trình cân bằng dạng ma trận. Chương trình tự động hóa quá trình tính toán gồm thiết lập ma trận độ cứng, quy đổi tải trọng phân bố, giải hệ phương trình để xác định chuyển vị, phản lực gối và nội lực trong dầm. Kết quả được hiển thị trực quan bằng bảng và biểu đồ mômen – lực cắt. Ngoài ra, bài viết so sánh kết quả giữa MSA và phương pháp phần tử hữu hạn (FEM), qua đó làm rõ ưu điểm về tính đơn giản, trực quan và khả năng ứng dụng của MSA trong giảng dạy và nghiên cứu kết cấu tuyến tính.

**KEYWORDS**

VBA Excel  
MSA  
FEM  
Plane beam  
Reaction force

**ABSTRACT**

A simple computational tool for planar beam analysis is developed in Excel using VBA based on the Matrix Structural Analysis (MSA) method. This method describes the relationship between nodal forces, nodal displacements, and structural stiffness through a matrix-form equilibrium equation. The program automates the calculation process, including stiffness matrix formulation, conversion of distributed loads into equivalent nodal forces, and solving the system of equations to determine displacements, support reactions, and internal forces of the beam. The results are presented visually through tables and shear–moment diagrams. In addition, the study compares the results of MSA with those of the Finite Element Method (FEM), highlighting the simplicity, transparency, and applicability of MSA in teaching and linear structural analysis research.

**1. Đặt vấn đề**

Trong lĩnh vực phân tích kết cấu công trình, việc xác định nội lực và phản lực của các cấu kiện như dầm, khung và dàn là một nội dung cơ bản nhưng có vai trò đặc biệt quan trọng. Trước đây, quá trình tính toán thường được thực hiện thủ công [1], [2], [3] hoặc dựa trên các phần mềm thương mại có chi phí cao và hoặc giao diện phần mềm phức tạp, gây khó khăn cho sinh viên trong việc nắm bắt bản chất của bài toán.

Sự phát triển của công cụ lập trình trong Excel mở ra khả năng tự động hóa các bước tính toán và minh họa trực quan quy trình phân tích kết cấu [3], [4]. Trong đó, phương pháp ma trận (Matrix Structural Analysis – MSA) [5], [6], [7] được xem là một công cụ hiệu quả, vừa mang tính tổng quát cao của lý thuyết đại số tuyến tính, vừa dễ triển khai trên các nền tảng đơn giản như VBA Excel.

Tuy nhiên, trong khi phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method – FEM) đã được ứng dụng rộng rãi, thì MSA – với cấu trúc ma trận gọn nhẹ, dễ hiểu và phù hợp cho các bài toán kết cấu tuyến tính – lại chưa được khai thác nhiều trong môi trường học tập và thực hành kỹ thuật. Do đó, việc xây dựng một chương trình tính toán nội lực dầm phẳng bằng MSA trên nền VBA Excel không chỉ giúp đơn giản hóa quy trình phân tích, mà còn tăng tính trực quan và khả năng kiểm soát từng bước tính toán.

Mục tiêu của bài viết này là xây dựng và ứng dụng công cụ VBA Excel để thực hiện phân tích dầm phẳng theo phương pháp ma trận, đồng thời so sánh với FEM nhằm đánh giá ưu điểm, hạn chế và tiềm năng ứng dụng của MSA trong giảng dạy và nghiên cứu cơ học kết cấu.

**2. Phương pháp nghiên cứu**

Trong phân tích kết cấu theo phương pháp ma trận (Matrix Structural Analysis – MSA), trạng thái cân bằng của hệ được biểu diễn thông qua mối quan hệ giữa lực nút, chuyển vị nút, và độ cứng của kết cấu. Thay vì xem xét toàn bộ hệ dưới dạng liên tục, MSA chia kết cấu thành các phần tử cơ bản, trong đó mỗi phần tử được mô hình hóa như một phần tử đàn hồi tuyến tính có các nút liên kết với nhau tại những vị trí đặc trưng.

Ở cấp độ phần tử, mối quan hệ giữa lực nút và chuyển vị nút được thiết lập dựa trên giả thiết vật liệu đàn hồi tuyến tính và biến dạng nhỏ, dẫn đến một hệ phương trình tuyến tính có dạng ma trận. Phương trình này thể hiện sự tương quan trực tiếp giữa biến dạng hình học và phản ứng nội lực của phần tử như sau [6], [7]:

$$[k_e]\{u_e\} = \{P_e\} - \{P_{fe}\} \quad (1)$$

\*Liên hệ tác giả: thienthanh09091998@gmail.com

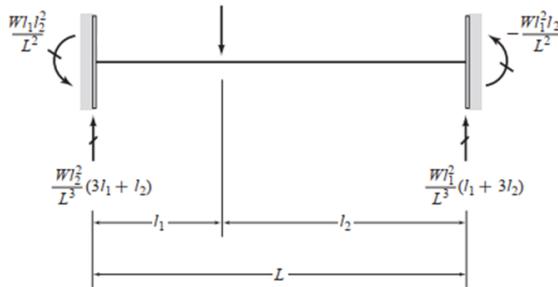
Nhận ngày 08/12/2025, sửa xong ngày 05/01/2026, chấp nhận đăng ngày 06/01/2026

Link DOI: <https://doi.org/10.54772/jomc.01.2026.1199>

Trong đó:

- $[k_e]$ : Là ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ cục bộ,
- $\{u_e\}$ : Là vectơ chuyển vị nút phần tử,
- $\{P_e\}$ : Là vectơ lực nút tác dụng bên ngoài lên phần tử,
- $\{P_{fe}\}$ : Là vectơ lực nút tương đương do tải trọng phân bố trên phần tử gây ra.

Tải trọng tác dụng lên dầm không chỉ là các lực tập trung tại nút mà còn có thể là tải phân bố đều, tam giác hoặc tải tập trung giữa nhịp. Để áp dụng phương pháp ma trận, các tải trọng này được quy đổi về lực nút tương đương nhằm đảm bảo cùng điều kiện cân bằng năng lượng với tải thực tế [5], [6].



**Hình 1.** Tải trọng tương đương tại các đầu nút của phần tử khi chịu lực tập trung.

Ma trận độ cứng phần tử dầm (Beam element) có dạng [8]:

$$[k_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Các thành phần này được cộng hoặc trừ tùy theo chiều dương quy ước của lực nút. Khi quy đổi xong, các tải trọng ngoài phân bố trên từng phần tử đều được đưa về nút, cho phép mô hình hóa toàn bộ hệ kết cấu bằng các ma trận phần tử tuyến tính.

Kết quả này cho phép xây dựng biểu đồ nội lực và biến dạng dầm, qua đó đánh giá khả năng chịu lực và trạng thái làm việc của kết cấu trong từng giai đoạn chịu tải. Thông qua việc phân tích phân bố nội lực dọc theo chiều dài dầm, sinh viên có thể xác định được vị trí nguy hiểm, giá trị nội lực cực trị trong các kết quả tính toán từ ma trận.

Có thể thấy rằng phương pháp ma trận (MSA) [5], [6], [7] và phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) [8] đều được xây dựng trên cùng một nền tảng toán học của đại số tuyến tính, trong đó trạng thái của hệ kết cấu được mô tả bằng mối quan hệ giữa chuyển vị nút, lực nút và ma trận độ cứng. Cả hai phương pháp đều sử dụng tư duy rời rạc hóa kết cấu – chia hệ liên tục thành các phần tử có quy luật biến dạng xác định – nhằm chuyển bài toán cơ học phức tạp thành hệ phương trình đại số có thể giải bằng máy tính.

Tuy nhiên, mục tiêu, cách tiếp cận và phạm vi ứng dụng của hai phương pháp lại có sự khác biệt rõ rệt. MSA [5], [6], [7] được xem như bước phát triển trung gian giữa cơ học kết cấu cổ điển và FEM [8], tập trung vào các hệ khung, dàn hoặc dầm tuyến tính có quy mô vừa phải, nơi mỗi phần tử có thể được mô tả bằng ma trận độ cứng xác định tường minh. Nhờ cấu trúc ma trận đơn giản và quy trình tính toán

rõ ràng, MSA giúp người học dễ dàng theo dõi, kiểm soát kết quả tính toán và hiểu sâu bản chất của quá trình phân tích kết cấu.



**Hình 2.** Lưu đồ thực hiện quy trình tính toán dầm phẳng bằng phương pháp ma trận.

Trong khi đó, FEM là phương pháp tổng quát hơn, cho phép mô hình hóa các bài toán có hình học phức tạp, vật liệu phi tuyến hoặc điều kiện biên đa dạng, nhờ sử dụng các hàm dạng (Shape functions) và tích phân phần tử để xây dựng ma trận độ cứng. Sự mở rộng này mang lại độ chính xác và tính linh hoạt cao, nhưng đồng thời cũng đòi hỏi nền tảng lý thuyết, thuật toán và công cụ tính toán phức tạp hơn.

Để làm rõ hơn mối liên hệ kế thừa và sự khác biệt giữa hai phương pháp, bảng dưới đây trình bày so sánh tổng quan giữa MSA [5], [6] và FEM [8] về nguyên lý xây dựng, quy trình tính toán, khả năng ứng dụng và mức độ phức tạp trong triển khai.

### 3. Kết quả

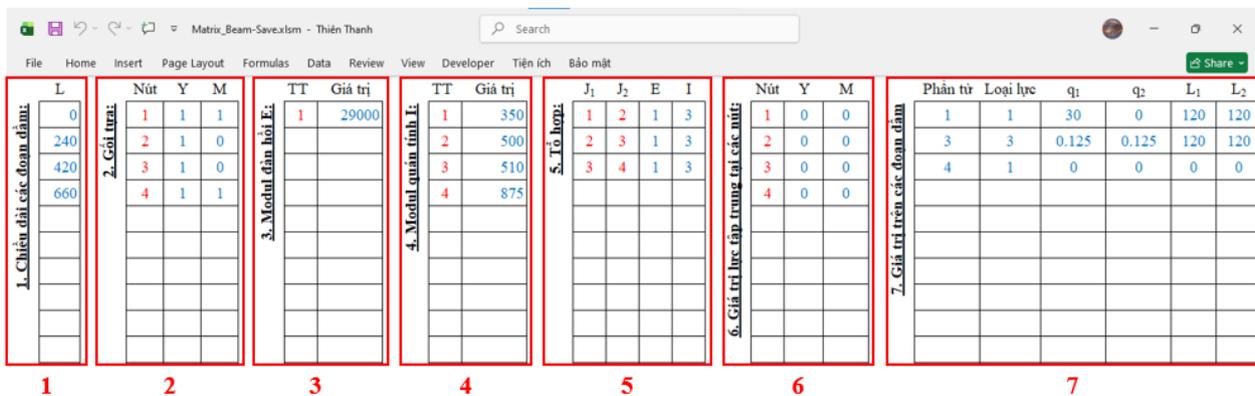
Chương trình tính toán dầm phẳng bằng phương pháp ma trận (MSA) [5], [6] được xây dựng trên nền tảng Excel – VBA đã được kiểm chứng thông qua nhiều bài toán mẫu với điều kiện biên và dạng tải trọng khác nhau. Kết quả cho thấy công cụ có khả năng xác định chính xác chuyển vị nút, phản lực gối và nội lực trong các phần tử dầm, đồng thời biểu diễn trực quan thông qua bảng số liệu, biểu đồ mômen.

Việc phát triển chương trình trong môi trường Excel mang lại lợi ích đặc biệt cho sinh viên thông qua việc quan sát trực tiếp từng bước tính toán, từ thiết lập ma trận độ cứng, lắp ghép hệ kết cấu cho đến giải hệ phương trình cân bằng, sinh viên có thể hiểu rõ bản chất của phương pháp ma trận, thay vì chỉ tiếp cận kết quả đầu ra như trong các phần mềm thương mại. Giao diện thân thiện và khả năng hiển thị kết quả trực quan cũng giúp người học dễ dàng kiểm chứng, đối chiếu và mở rộng bài toán, góp phần tăng tính chủ động và tư duy phân tích trong quá trình học tập và nghiên cứu cơ học kết cấu.

**Bảng 1.** Phương pháp MSA và phương pháp FEM.

<i>Tiêu chí so sánh</i>	<i>Matrix structural analysis - MSA</i> <i>Phương pháp phân tích đại số ma trận</i>	<i>Finite element method - FEM</i> <i>Phương pháp mô phỏng xấp xỉ phần tử hữu hạn</i>
<i>Cơ sở lý thuyết</i>	MSA được xây dựng trên nguyên tắc cân bằng lực và chuyển vị của các nút thanh trong mỗi phần tử. $\sum F = 0; \sum M = 0$	FEM được phát triển từ cơ học liên tục và giải số các phương trình đạo hàm riêng (PDEs) $-\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x)$
<i>Các loại phần tử</i>	Dạng thanh, không mô tả được miền cong hoặc đặc. Phân tích khung, giàn, dầm, cầu trúc thanh 2D, 3D.	Đa dạng hơn. Mô phỏng tốt hình học bất kỳ, miền cong, vật thể rắn, tấm, vỏ, khối 3D.
<i>Cấp ma trận</i>	Kích thước ma trận nhỏ hơn nhiều so với FEM. Ma trận theo cấp số cộng của bậc tự do phần tử.	Kích thước ma trận rất lớn để có nghiệm chính xác. Ma trận theo cấp số nhân của bậc tự do phần tử.
<i>Tốc độ và chính xác</i>	Rất nhanh, cho nghiệm phương trình chính xác bằng phương pháp đại số.	Chậm hơn nhưng không đáng kể, cho nghiệm nội suy xấp xỉ với các bài toán có miền phức tạp.
<i>Độ ổn định</i>	Cao, cho kết quả hội tụ nhanh.	Có thể gặp tình trạng khó tìm được nghiệm ổn định hoặc kết quả bị sai lệch do sai số tính toán.
<i>Độ phức tạp</i>	Dễ lập trình, dễ tính toán hơn. Phù hợp với sinh viên.	Phức tạp hơn, khó tính toán và khó lập trình hơn, phù hợp với học viên nghiên cứu sau đại học.
<i>Ẩn số</i>	Chuyển vị $u$ của các nút. Sau đó dùng chuyển vị để xử lý tất cả các bài toán còn lại	

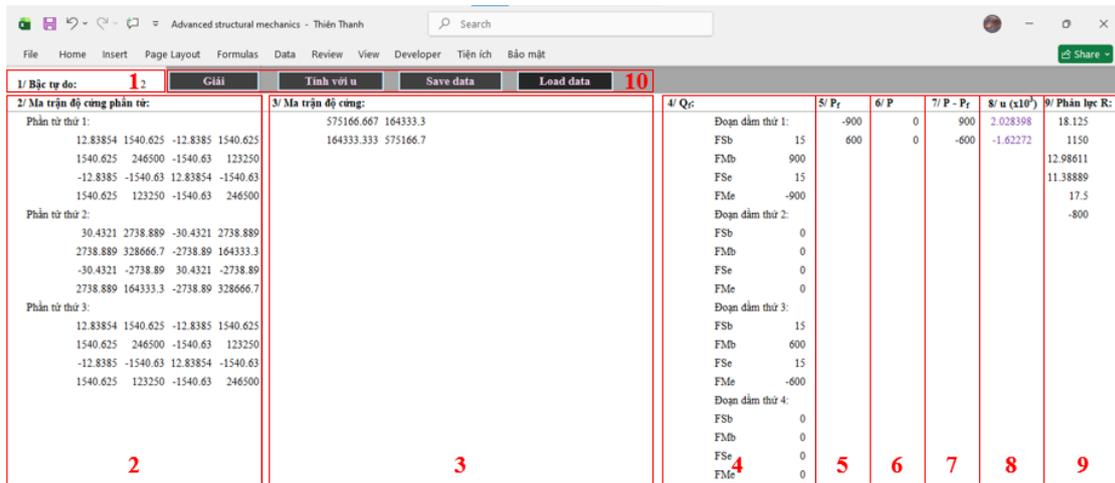
3.1. Giao diện chương trình



**Hình 3.** Giao diện của chương trình phân tích trên nền chương trình Microsoft excel.

**Bảng 2.** Thông tin hướng dẫn nhập liệu vào các vị trí của chương trình.

STT	Tên	Chức năng
1	Chiều dài phần tử	Khai báo từng chiều dài từng phần tử dầm trong hệ.
2	Gối tựa	Khai báo vị trí của gối tựa dựa vào vị trí nút theo số phần tử.
3	Modul đàn hồi $E$	Khai báo các giá trị của modul đàn hồi $E$ .
4	Moment quán tính $I$	Khai báo các giá trị của moment quán tính chính trung tâm $I$ .
5	Tổ hợp	Gán thông tin modul $E$ và moment quán tính $I$ cho phần tử.
6	Lực tập trung	Khai báo lực tập trung, moment tập trung tại các vị trí nút.
7	Lực	Khai báo lực phân bố hoặc lực tập trung trên phần tử dầm.



Hình 4. Giao diện hiển thị kết quả phân tích dựa theo số liệu đề bài nhập vào.

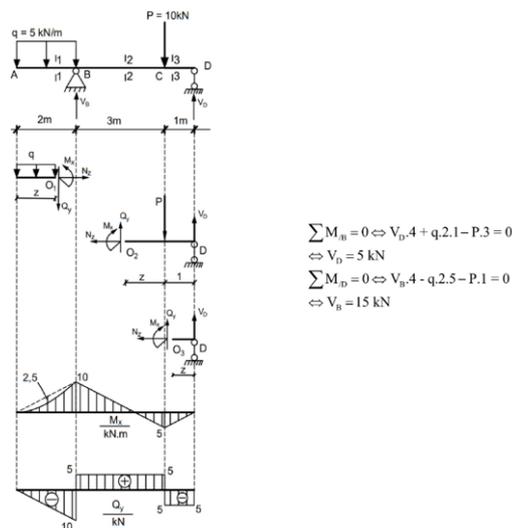
Bảng 3. Thông tin hướng dẫn đọc kết quả phân tích đầu ra.

STT	Tên	Chức năng
1	Bậc tự do	Hiện thị kết quả tổng số bậc tự do hiện tại của hệ.
2	Ma trận độ cứng $k_e$	Hiện thị kết quả ma trận độ cứng của các phần tử khai báo.

Bảng 4. Thông tin hướng dẫn đọc kết quả phân tích đầu ra (Tiếp theo).

STT	Tên	Chức năng
3	Ma trận độ cứng $K$	Hiện thị kết quả ma trận độ cứng tổng thể của hệ.
4	$Q_f$	Hiện thị giá trị lực tương đương tính được tại các nút ở phần tử.
5	$P_r$	Véctơ tải tương đương tổng thể tại các bậc tự do ràng buộc.
6	$P$	Véctơ giá trị tải trọng tập trung tại các nút của phần tử.
7	$P - P_r$	Véctơ giá trị lực tác dụng thuần bên ngoài.
8	$u$	Véctơ giá trị chuyển vị tại các nút trên phần tử.
9	Phản lực $R$	Véctơ giá trị phản lực tại từng vị trí bị ràng buộc.
10	Các nút chức năng	Giải mô hình, hỗ trợ lưu và mở mô hình đã lưu, ....

3.2. Ứng dụng hệ kết cấu dầm tĩnh định



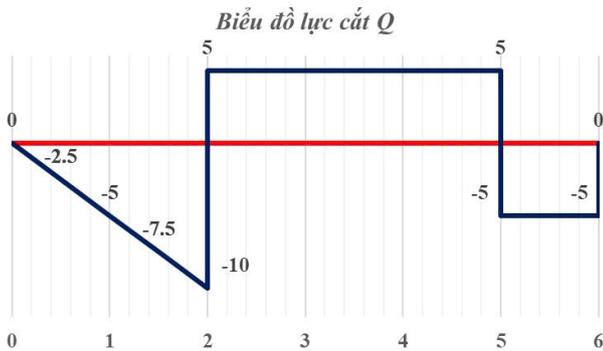
Hình 5. Ví dụ về một bài toán dầm tĩnh định [9], [10].

1. Chiều dài các đoạn dầm:		2. Các nút:		3. Modul đàn hồi E:		4. Modul quán tính I:		5. Tổ hợp:		6. Giá trị lực tập trung tại các nút:		7. Giá trị trên các đoạn dầm								
L	Nút	Y	M	TT	Giá trị	TT	Giá trị	J <sub>1</sub>	J <sub>2</sub>	E	I	Nút	Y	M	Phần tử	Loại lực	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>
0	1	0	0	1	1			1	2	1	1	1	0	0	1	3	5	5	0	2
2	2	1	0					2	3	1	1	2	0	0	4	1	0	0	0	0
5	3	0	0					3	4	1	1	3	-10	0						
6	4	1	0									4	0	0						

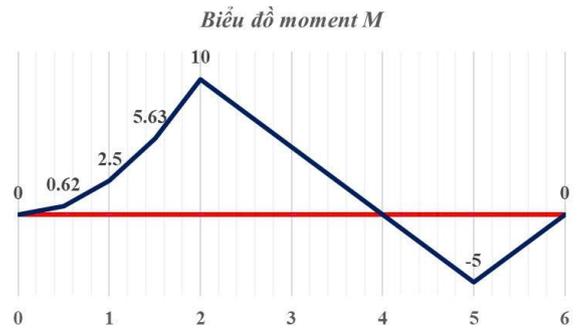
Hình 6. Khai báo thông tin bài toán.

1/ Bậc tự do:	2/ Ma trận độ cứng phần tử:	3/ Ma trận độ cứng:	4/ Q <sub>c</sub> :	5/ P <sub>r</sub> :	6/ P:	7/ P - P <sub>r</sub> :	8/ u (x10 <sup>3</sup> ):	9/ Phản lực R:
Phần tử thứ 1:	1.5 1.5 -1.5 1.5	1.5 1.5 1.5 0 0 0	Đoạn dầm thứ 1:	5	0	-5	-24166.7	15
Phần tử thứ 2:	0.44444 0.66667 -0.44444 0.66667	1.5 2 1 0 0 0	FSb	1.66667	0	-1.66667	13750	5
Phần tử thứ 3:	12 6 -12 6	1.5 1 3.33333 -0.66667 0.66667 0	FMd	1.66667	-1.66667	1.66667	7083.333	5

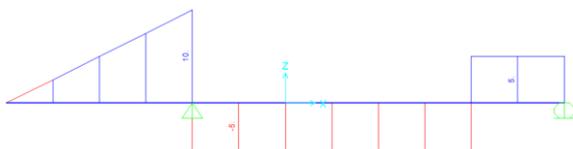
Hình 7. Kết quả phân tích, tính toán từ thông tin đầu vào.



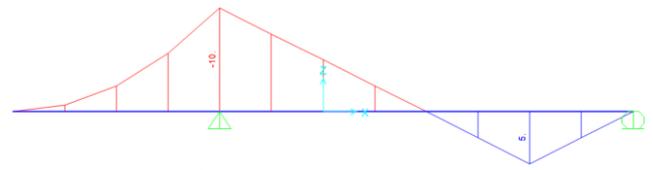
Hình 8. Biểu đồ lực cắt Q (kN) vẽ bằng excel.



Hình 10. Biểu đồ moment M (kNm) vẽ bằng excel.

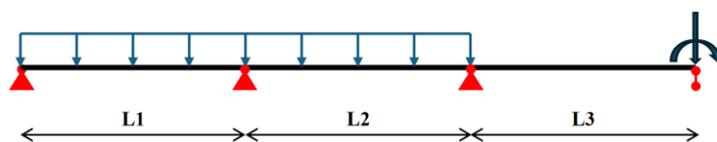


Hình 9. Kết quả biểu đồ lực cắt trong hệ từ phần mềm SAP2000.



Hình 11. Kết quả biểu đồ mô men trong hệ từ phần mềm SAP2000.

3.3. Ứng dụng hệ kết cấu dầm siêu tĩnh



Hình 12. Ví dụ về một bài toán dầm liên tục (Hệ kết cấu dầm siêu tĩnh) [11].



hiệu quả, dễ lập trình và trực quan trong việc xác định phân lực nút, đặc biệt phù hợp cho hệ kết cấu tuyến tính, hình học đơn giản. Ngược lại, FEM có mức độ linh hoạt và khả năng mô phỏng cao hơn, cho phép phân tích các hệ kết cấu có hình học và điều kiện làm việc phức tạp hơn tuy nhiên FEM cũng đòi hỏi quy trình tính toán và mô hình hóa công phu hơn rất nhiều so với MSA.

MSA có thể xem là bước đệm nền tảng giúp người học tiếp cận, làm quen FEM do cả hai cùng dựa trên cơ sở rời rạc hóa kết cấu và lắp ráp ma trận độ cứng toàn cục. Trên nền tảng đó, việc triển khai MSA bằng VBA Excel trong bài viết hiện tại đối với các hệ kết cấu dầm góp phần rèn luyện tư duy lập trình kỹ thuật cho sinh viên, học viên, mà còn tạo mối liên hệ, hiểu biết chặt chẽ giữa lý thuyết và thực hành. Trong các nghiên cứu tiếp theo, mô hình này có thể được mở rộng sang phân tích các hệ kết cấu phẳng khác như dàn phẳng, khung phẳng hoặc các hệ kết cấu giàn, khung không gian. Qua đó phát triển một công cụ tính toán có giao diện gần gũi, nhẹ nhàng, trực quan và hiệu quả, phục vụ tốt cho công tác giảng dạy, học tập và nghiên cứu về lĩnh vực cơ học kết cấu.

#### Tài liệu tham khảo

- [1]. Weaver William and James M. Gere, *Matrix Analysis Framed Structures*, Third edition. Springer US, 2012.
- [2]. J. S. Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, Illustrated. Dover, 1985.
- [3]. R.K.Livesley, *Matrix Methods of Structural Analysis*, Second edition. Elsevier Science, 2014.
- [4]. P.N.Godbole, R.S.Sonparote, and S.U.Dhote, *Matrix Methods of Structural Analysis*. PHI Learning Private Limited, 2014. [Online]. Available: [https://books.google.com.vn/books?id=06Z2BAAAQBAJ&printsec=frontcover&source=gbs\\_ge\\_summary\\_r&cad=0#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.vn/books?id=06Z2BAAAQBAJ&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false)
- [5]. A. Ghali and A. Neville, *Structural Analysis: A unified classical and matrix approach*, 7th ed. CRC Press, 2018. [Online]. Available: [https://www.google.com.vn/books/edition/\\_/4NXJuwEACAAJ?hl=en&sa=X&ved=2ahUKEwi0x5nRpuKQAxXQefUHHfmfHMQQre8FegQIDBAM](https://www.google.com.vn/books/edition/_/4NXJuwEACAAJ?hl=en&sa=X&ved=2ahUKEwi0x5nRpuKQAxXQefUHHfmfHMQQre8FegQIDBAM)
- [6]. A. Kassimali, *Matrix Analysis of Structure*, 3rd ed., SI ver. Boston, MA: Cengage Learning, 2021. [Online]. Available: [https://www.google.com.vn/books/edition/Matrix\\_Analysis\\_of\\_Structures\\_SI\\_Edition/NA4HzgEACAAJ?hl=en](https://www.google.com.vn/books/edition/Matrix_Analysis_of_Structures_SI_Edition/NA4HzgEACAAJ?hl=en)
- [7]. W. McGuire, R. H. Gallagher, and R. D. Ziemian, *Matrix structural analysis*, 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc, 1979.
- [8]. N. T. Trung and N. X. Hùng, “Phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng Matlab.” [Online]. Available: <https://nxbaydung.com.vn/phuong-phap-phan-tu-huu-han-su-dung-matlab-b5313.html>
- [9]. T. V. Liên, “Sức bền vật liệu,” Onthisinhvien.com. [Online]. Available: <https://nxbaydung.com.vn/giao-trinh-suc-ben-vat-lieu-b5151.html>
- [10]. L. T. Trinh, “Cơ học kết cấu tập 1 Hệ tĩnh định.” [Online]. Available: <https://nxbkht.com.vn/san-pham/co-hoc-ket-cau-tap-1-he-tinh-dinh>
- [11]. L. T. Trinh, “Cơ học kết cấu tập 2 - Hệ siêu tĩnh.” [Online]. Available: <https://www.studocu.vn/vn/document/dai-hoc-dien-luc/dien-luc-university/giao-trinh-co-hoc-ket-cau-tap-2-he-sieu-tinh-gsts-leu-tho-trinh-964803/97258977>