

Khảo sát ảnh hưởng của việc bố trí cốt thép đến độ cứng chống xoắn của sàn bê tông cốt thép bằng thực nghiệm và mô phỏng số

Nguyễn Mai Chí Trung^{1*}

¹Khoa Kỹ thuật và Công nghệ, Trường Đại học Quy Nhơn

TỪ KHOÁ

Độ cứng chống xoắn
Phân tích phi tuyến
Mô phỏng số

TÓM TẮT

Bài báo này trình bày một nghiên cứu về ảnh hưởng của việc bố trí cốt thép đến độ cứng chống xoắn của sàn bê tông cốt thép, bằng thực nghiệm và mô phỏng số. Độ cứng chống xoắn của sàn trước khi bê tông nứt và sau khi bê tông nứt đến thời điểm cốt thép bắt đầu chảy dẻo được xác định. Các kết quả thí nghiệm, kết quả mô phỏng số (FEA) và lời giải giải tích được so sánh với nhau.

KEYWORDS

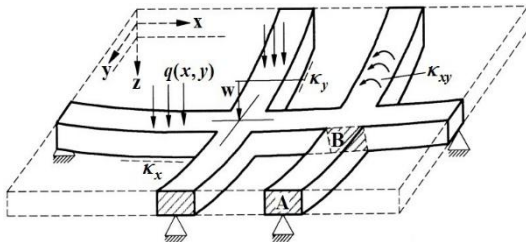
Torsional stiffness
Non-linear analysis
FEA

ABSTRACT

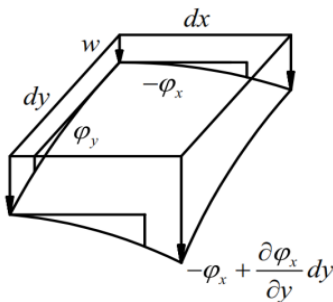
This paper presents a study on the effect of reinforcement arrangement on the torsional stiffness of reinforced concrete slabs (RC Slabs), by experiment and finite element analysis. Torsional stiffness of slabs at pre-cracking stage and post-yielding of steel stage is determined. The test results are good comparison with FEA and the analytical solution results.

1. Đặt vấn đề

Xét một ô bản chữ nhật làm việc hai phương, bốn cạnh liên kết đơn giản. Chịu tải trọng phân bố đều q (kN/m²). Để thấy rõ hiệu ứng xoắn trong bản, xét một dải bản theo phương y , chứa các mặt cắt A và B, hình 1. Dưới tác dụng của tải trọng phân bố trên bề mặt bản, tại một vị trí y bất kỳ, thì tiết diện B đã bị thay đổi góc theo phương y so với tiết diện A, dẫn đến hiệu ứng xoắn trong bản. Nói một cách khác, sự xoắn trong bản chính là sự thay đổi góc ϕ_x theo phương y , hình 2.



Hình 1. Hiệu ứng xoắn trong sàn [1].



Hình 2. Sự thay đổi góc ϕ_x theo phương y .

Độ cứng của sàn phụ thuộc vào nhiều yếu tố: cường độ của vật liệu, kích thước của sàn, hàm lượng cốt thép, cách bố trí cốt thép và tải trọng tác dụng. Ứng xử của sàn rất khác nhau trước và sau khi bê tông nứt. Đặc biệt sau khi bê tông nứt và cốt thép bắt đầu chảy dẻo thì độ cứng của sàn giảm rất nhiều.

Theo đề nghị của CEB [2], khi nứt chủ yếu do uốn, độ cứng chống xoắn nên lấy bằng 25 % của độ cứng đàn hồi ban đầu, và khi nứt chủ yếu do cắt hoặc xoắn, thì độ cứng chống xoắn lấy bằng khoảng 10 % của độ cứng đàn hồi. Độ cứng chống xoắn của sàn trong giai đoạn đàn hồi, $D_{xy,I}$, có thể xác định từ lời giải giải tích [3, 4, 5]. Tuy nhiên, độ cứng chống xoắn của sàn sau khi bê tông nứt và cốt thép bắt đầu chảy dẻo, $D_{xy,II}$, thì không thực sự rõ ràng. Khi sàn chủ yếu chịu uốn, tỷ số độ cứng uốn trước và sau khi bê tông nứt $D_I/D_{II} \approx 3-5$ có thể chấp nhận được, nhưng khi sàn chủ yếu chịu xoắn thì tỷ số này không còn hợp lý [6].

Có thể kể đến vài nghiên cứu thực nghiệm về ứng xử của sàn BTCT chịu xoắn, điển hình là Marti và cộng sự [7] đã nghiên cứu ứng xử của các tấm BTCT vuông chịu xoắn và trình bày phương pháp dự báo tải trọng-biến dạng của sàn. Gần đây nhất có Lopes và cộng sự [6] đã nghiên cứu độ cứng của sàn BTCT chịu xoắn trước và sau khi bê tông nứt, tuy nhiên kết quả chưa cho thấy rõ được ảnh hưởng của hàm lượng cốt thép đến độ cứng chống xoắn của sàn.

Để nghiên cứu sự ảnh hưởng của việc bố trí cốt thép đến độ cứng chống xoắn của sàn, đồng thời khảo sát sự giảm độ cứng chống xoắn trước và sau khi bê tông nứt, tác giả đã làm các thí nghiệm cho hai tấm sàn vuông BTCT chịu xoắn, được bố trí cốt thép đẳng hướng, có hàm lượng cốt thép khác nhau. Kết quả thí nghiệm được dùng làm cơ sở để xây dựng mô hình phần tử hữu hạn (PTHH). Từ mô hình PTHH đã được khẳng định, ảnh hưởng của việc bố trí cốt thép trực

*Liên hệ tác giả: nguyennaichitruong@qnu.edu.vn

Nhận ngày 10/04/2026, sửa xong ngày 07/05/2026, chấp nhận đăng ngày 08/05/2026

Link DOI: <https://doi.org/10.54772/jomc.03.2026.1349>

hướng đến độ cứng chống xoắn được khảo sát. Các kết quả được trình bày ở mục 5.

2. Chương trình thí nghiệm

2.1. Mục đích

(1) Nghiên cứu ứng xử của sàn BTCT chịu xoắn bao gồm: sự hình thành và phát triển vết nứt, ứng suất trong các thanh cốt thép, quan hệ tải trọng - chuyển vị, mômen xoắn - độ xoắn. Độ cứng chống xoắn của sàn tại thời điểm bê tông bắt đầu nứt và cốt thép bắt đầu chảy dẻo. (2) Nghiên cứu ảnh hưởng của hàm lượng cốt thép đến độ cứng chống xoắn của sàn.

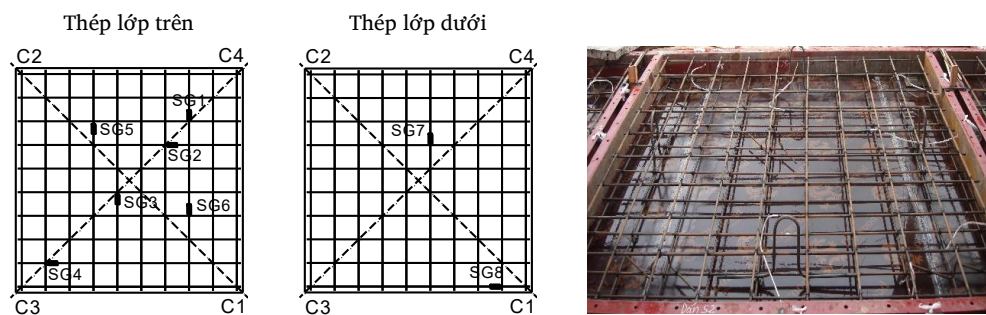
2.2. Mẫu thí nghiệm

Hai tấm sàn vuông BTCT, kích thước 1,9×1,9×0,15 m. Sàn được đặt cốt thép theo hai phương vuông góc nhau, lưới cốt thép ở mặt trên và dưới giống nhau. Cốt thép đường kính 10 mm, có mô đun đàn hồi $E_s=194$ GPa, giới hạn chảy $f_y=468$ MPa, giới hạn bền $f_u=562$ MPa. Bê tông ở 28 ngày tuổi có các đặc trưng cơ lý: mô đun đàn hồi $E_c=28$ GPa, cường độ chịu nén trung bình $f_{cm}=38$ MPa. Chi tiết các mẫu thí nghiệm được cho trong bảng 1. Trong đó, t là chiều dày thực

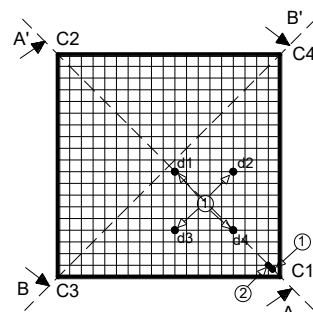
Bảng 1. Đặc trưng của mẫu thí nghiệm.

Tên mẫu	t (cm)	Lưới thép	Hàm lượng thép (%)	Ngày tuổi của mẫu (ngày)	f_{cm} (MPa)
S1_I_a200_H150	15,5	φ10a200 (X,Y)	0,32	103	41,76
S2_I_a100_H150	15,4	φ10a100 (X,Y)	0,64	107	41,47

Giải thích ký hiệu tên mẫu: (S): sàn _ (I): cốt thép đẳng hướng (Isotropic)_ (a): khoảng cách giữa các thanh cốt thép _ (H): chiều dày sàn.



Hình 3. Vị trí dán các strain gage cho mẫu S1_I_a200_H150.



- ① LVDTs
- ② Load cell LRCN 730 500
- ③ Kịch gia tải 500kN
- ④ Trô thép
- ⑤ DQM thép
- ⑥ Sụn
- ⑦ Gi, @ LVDTs
- ⑧ Khèi thép trô
- C1- T, c đồng lúc
- C2- §- i c ng" n c¶n chuy¶n v¶H¶n
- C3, C4- §- i c ng" n c¶n chuy¶n v¶xu¶ng

tế của mẫu, f_{cm} là cường độ chịu nén trung bình của mẫu bê tông hình lập phương tại ngày thí nghiệm.

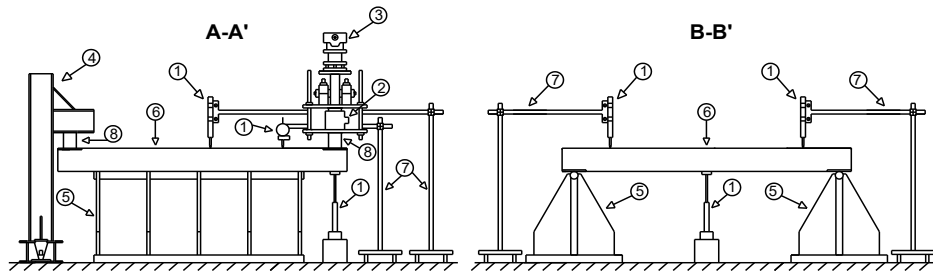
Để nghiên cứu ứng suất và biến dạng trong cốt thép, các strain gages được dán vào các thanh cốt thép của một mẫu, trong đó lưới thép ở trên được dán sáu cái, lưới thép ở dưới được dán hai cái, hình 3. Vị trí dán các strain gages được căn cứ từ kết quả của FEA.

Tại các vị trí gối tựa và vị trí tác dụng tải trọng, các tấm thép kích thước 150×150×10 mm được đặt vào trong sàn để tránh sự tập trung ứng suất. Các mẫu được thiết kế để tránh xảy ra phá hoại do uốn hoặc cắt.

2.3. Sơ đồ thí nghiệm

Để sàn chủ yếu chịu mômen xoắn, sơ đồ thí nghiệm được thiết kế như hình 4. Sàn được đặt trên mặt phẳng nằm ngang, nhờ các gối tựa rất cứng. Góc C3 và C4 được ngăn cản chuyển vị đi xuống, góc C2 được ngăn cản chuyển vị đi lên. Tải trọng tập trung được tác dụng tại góc C1.

Dùng bốn LVDTs để đo chuyển vị tại bốn điểm d1, d2, d3, d4 trên mặt sàn, khoảng cách giữa các LVDTs là 500 mm, một LVDT đo chuyển vị tại góc C1. Kích gia tải động 500 kN và Load cell LRCN 730 500 kN để đo lực tại góc C1.

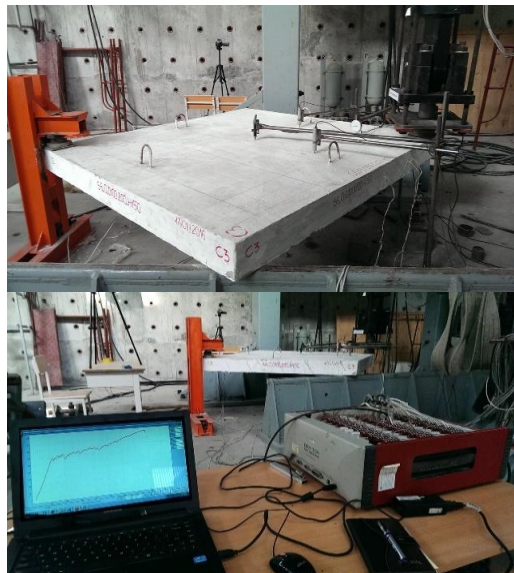


Hình 4. Sơ đồ bố trí thí nghiệm.

2.4. Tiến hành thí nghiệm

Các tấm sàn được gia tải một lực tập trung tại góc C1. Tải trọng được tăng dần, từ không cho đến khi sàn bị phá hoại, bởi một bộ kích gia tải có công suất 500 kN, hành trình tối đa của kích được thiết lập là 75 mm. Tốc độ gia tải là 0,05 mm/s. Các thiết bị LVDTs, Loadcell, Strain gages được kết nối với một Data Logger DRA-30A để đọc và ghi lại toàn bộ dữ liệu trong quá trình thí nghiệm, hình 5.

Với thí nghiệm đã thiết lập, mômen xoắn được phân bố đều trong sàn.



Hình 5. Quá trình thí nghiệm và ghi dữ liệu.

3. Mô phỏng số (FEA)

Các kết quả thí nghiệm được sử dụng để làm cơ sở cho việc xây dựng mô hình mô phỏng số (FEA), sau đó dùng mô hình số này để khảo sát tham số.

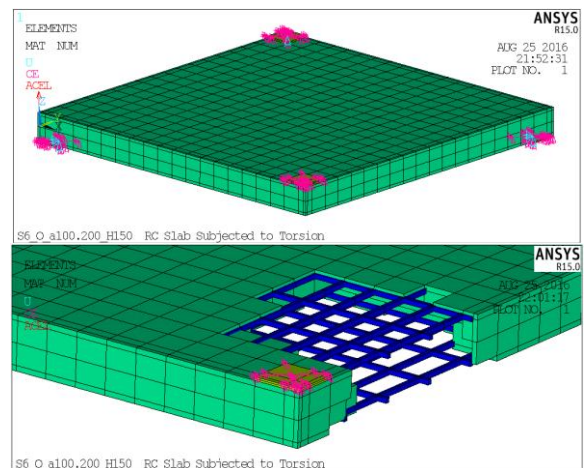
3.1. Mô hình phần tử hữu hạn

Mô hình phần tử hữu hạn được xây dựng trên phần mềm ANSYS. Trong đó, phần tử khối SOLID65 được sử dụng để mô hình hóa cho bê tông. Phần tử gồm tám nút với ba bậc tự do tại mỗi nút

theo các phương x, y, z. Tính chất quan trọng của phần tử này là cho phép định nghĩa vật liệu phi tuyến, xét được nứt theo ba phương và dùng để mô tả vật liệu bê tông có chứa hàm lượng cốt thép. Vết nứt được mô hình hóa theo mô hình “smeared” [8, 9]. Cốt thép trong bê tông được mô hình hóa theo mô hình “discrete” [9] bằng phần tử LINK180, đây là phần tử thanh 3D, có hai nút, mỗi nút có ba bậc tự do theo ba phương x, y, z. Phần tử khối SOLID185 được sử dụng để mô hình hóa các tấm thép dẹt.

Chia lưới cho mô hình: theo phương chiều dày, sàn được rời rạc thành bốn phần tử, theo hai phương còn lại, sàn được rời rạc thành 22 phần tử, hình 6. Việc chia lưới này đã được khảo sát và kiểm tra để cho kết quả ổn định.

Điều kiện biên: các nút trên tấm thép tại góc C2 được ngăn cản chuyển vị đi lên, $U_Z = 0$, để ma trận độ cứng không bị suy biến thì các nút trên tấm thép tại góc C3 và C4 được ngăn cản chuyển vị theo ba phương, $U_X = 0$, $U_Y = 0$, $U_Z = 0$.



Hình 6. Chia lưới và điều kiện biên.

3.2. Mô hình vật liệu

Bê tông: quan hệ ứng suất - biến dạng của bê tông khi nén một trục được lấy theo mô hình của Kachlakev [10], hình 7a. Chi tiết về các phương trình tính toán xem trong [11, 12]. Quan hệ ứng suất - biến dạng của bê tông khi chịu kéo, được cho ở hình 7b [8]. Trong tính toán, độ cứng của phần tử theo phương vuông góc với mặt phẳng nứt bị chiết giảm theo hệ số truyền lực cắt qua vết nứt β_t và mô đun

cát tuyến R_t [8]. Trong nghiên cứu này, lấy hệ số truyền lực cắt khi vết nứt mở $\beta_t = 0,35$ và khi vết nứt đóng $\beta_c = 0,7$ [9]. Mô đun đàn hồi và mô đun nứt của bê tông được xác định theo phương trình (1) và (2) [13, 14, 15].

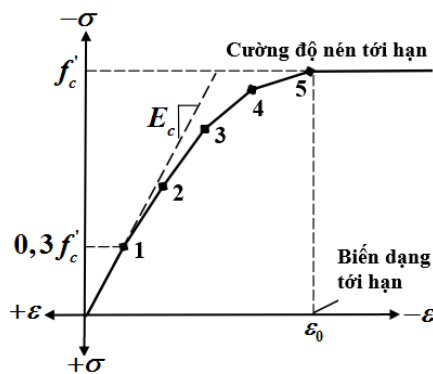
$$E_c = 0,043\rho^{1,5}\sqrt{f'_c} \quad (1)$$

$$f_r = K\sqrt{f'_c} \quad (2)$$

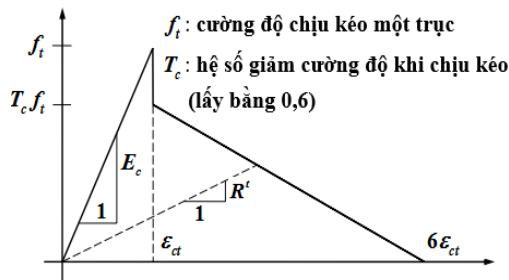
Với K là hệ số, có thể lấy bằng $8 \div 12$, xem trong [14], và có thể lấy bằng $9 \div 13$, xem trong [15]. Trong nghiên cứu này, lấy $K = 9,5 f'_c$ là cường độ chịu nén của bê tông ở ngày thí nghiệm tẩm sàn, ρ là trọng lượng riêng của bê tông, ở đây lấy $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$.

Cốt thép: dùng mô hình đàn dẻo lý tưởng, hình 8.

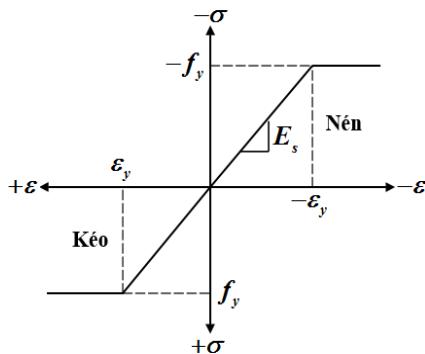
Tính chất cơ lý của vật liệu như trong mục 2.2.



Hình 7a. Quan hệ ứng suất - biến dạng của bê tông khi chịu nén [10].



Hình 7b. Quan hệ ứng suất - biến dạng của bê tông khi chịu kéo [8].



Hình 8. Quan hệ ứng suất - biến dạng khi chịu kéo và nén của cốt thép [15].

4. Phương pháp bán giải tích xác định độ cứng chống xoắn của sàn

Chi tiết phương pháp xem trong [16, 17]. Độ cứng chống xoắn của sàn được tính cho hai giai đoạn, trong đó, giai đoạn I là từ điểm sàn bắt đầu chịu tải cho đến điểm bê tông bắt đầu nứt, $D_{xy,I}$, và giai đoạn II là từ điểm bê tông bắt đầu nứt đến điểm cốt thép bắt đầu chảy dẻo, $D_{xy,II}$.

$$D_{xy,I} = \frac{m_{xy,cr}}{\kappa_{xy,cr}} \quad (3)$$

$$D_{xy,II} = \frac{m_{xy,y} - m_{xy,cr}}{\kappa_{xy,y} - \kappa_{xy,cr}} \quad (4)$$

Trong đó, $m_{xy,cr}$ và $\kappa_{xy,cr}$ lần lượt là mômen xoắn trung bình và độ xoắn khi bê tông bắt đầu nứt, $m_{xy,y}$ và $\kappa_{xy,y}$ lần lượt là mômen xoắn trung bình và độ xoắn khi cốt thép bắt đầu chảy dẻo.

Từ kết quả thí nghiệm (cũng như kết quả mô phỏng), ta có các giá trị chuyển vị d_1, d_2, d_3, d_4 , giá trị lực P , và biết được thời điểm bê tông bắt đầu nứt và cốt thép bắt đầu chảy dẻo, từ đó tính độ cứng chống xoắn theo (3) và (4).

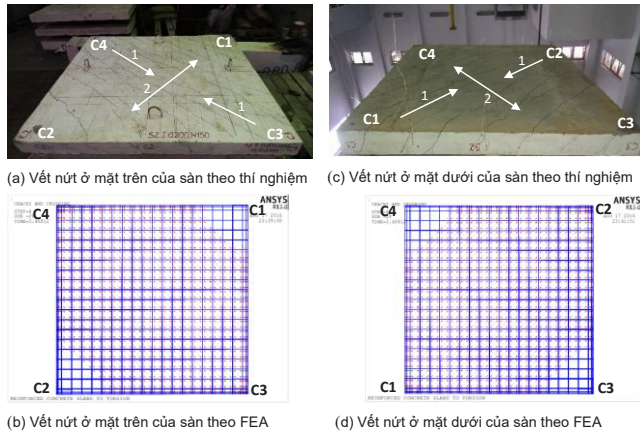
5. Kết quả

Các kết quả thí nghiệm, cũng như kết quả phân tích PTHH về sự làm việc của sàn chịu xoắn được thể hiện thông qua các quan hệ tải trọng - chuyển vị, và quan hệ mômen xoắn - độ xoắn, thể hiện ở hình 12 và hình 13. Độ cứng chống xoắn của sàn được tính toán dựa trên các kết quả phân tích sự làm việc của sàn và so sánh với độ cứng chống xoắn tính theo công thức của Nielsen [4], được trình bày trong bảng 3.

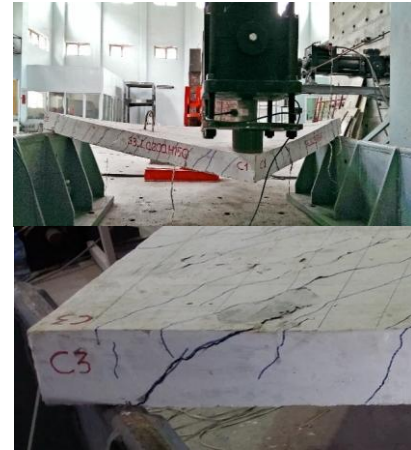
5.1. Vết nứt, hình dạng biến dạng, cơ cấu phá hoại của sàn và ứng suất trong cốt thép

Vết nứt, cơ cấu phá hoại của sàn từ kết quả thí nghiệm (EXP) và FEA tương đồng nhau. Vết nứt gần như nghiêng một góc 45° so với cạnh sàn. Ở mặt trên, vết nứt đầu tiên xảy ra tại góc C3, C4 và lan dần vào tâm của sàn theo hướng một, các vết nứt tiếp theo gần như song song với vết nứt đầu tiên và phát triển theo hướng hai, hình 9a, 9b. Vết nứt ở mặt dưới trực giao với vết nứt ở mặt trên, hình 9c, 9d. Sự phá hoại của sàn xảy ra khi bê tông tại góc C3 hoặc C4 bị nén vỡ, hình 10.

Ứng suất trong cốt thép được tính từ giá trị biến dạng đo được của các Strain gage, $\sigma_{s,cr}$, $\sigma_{s,max}$ lần lượt là ứng suất trong cốt thép tại thời điểm bê tông bắt đầu nứt, tải trọng cực hạn. Từ bảng 2, nhận thấy cốt thép tại các vị trí dán Strain gages đã chảy dẻo.



Hình 9. Vết nứt trong sàn.

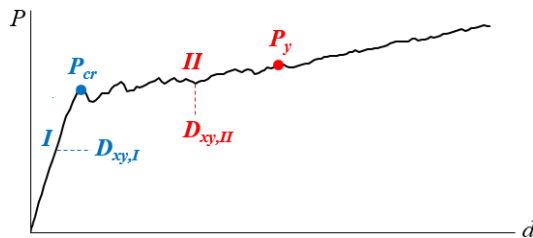


Hình 10. Hình dạng biến dạng và cơ cấu phá hoại của sàn.

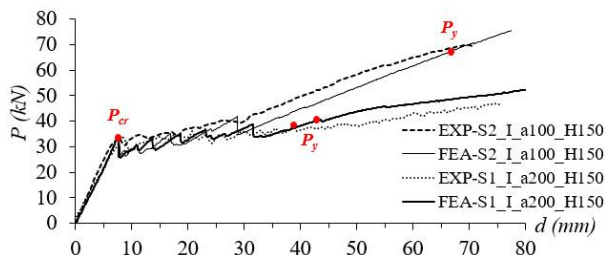
Bảng 2. Ứng suất trong cốt thép của mẫu S1_I_a200_H150.

Strain gages	SG1	SG2	SG3	SG4	SG5	SG6	SG7	SG8
$\sigma_{s,cr}$ (MPa)	30,9	18,1	11,6	5,9	5,0	5,1	23,1	9,0
$\sigma_{s,max}$ (MPa)	492,3	472,1	471,3	474,6	472,4	471,5	485,1	472,3

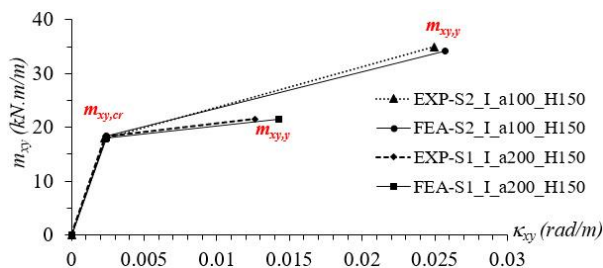
5.2. Độ cứng chống xoắn của sàn



Hình 11. Các điểm chính trên đường cong P-d.



Hình 12. Quan hệ P-d giữa EXP và FEA.



Hình 13. Quan hệ m_{xy}-κ_{xy} giữa EXP và FEA.

Từ đường cong quan hệ tải trọng - chuyển vị, mômen xoắn - độ xoắn, cho thấy kết quả thí nghiệm (EXP) và kết quả FEA rất phù hợp nhau, đặc biệt ở giai đoạn I. Với mẫu S1_I_a200_H150, tải trọng và chuyển vị tại thời điểm cốt thép chảy dẻo theo EXP nhỏ hơn các giá trị đó theo FEA trong khoảng dưới 15 %, nguyên nhân một phần do ảnh hưởng của việc mài cốt thép để dán Strain gages.

Từ bảng 3 nhận thấy, kết quả độ cứng chống xoắn theo ba lời giải xấp xỉ nhau, ngoại trừ độ cứng chống xoắn ở giai đoạn II của sàn S2 theo Nielsen bằng khoảng 50 % so với kết quả thí nghiệm và FEA. Kết quả cho thấy lời giải của Nielsen chưa thể hiện rõ ảnh hưởng của hàm lượng cốt thép đến độ cứng chống xoắn của sàn ở giai đoạn II.

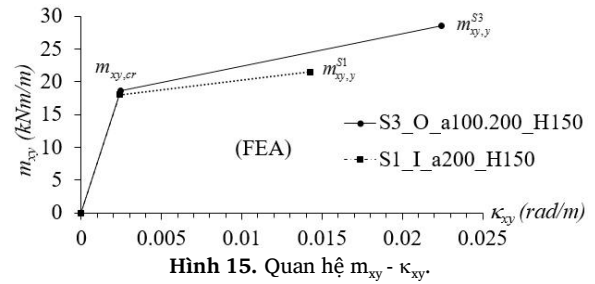
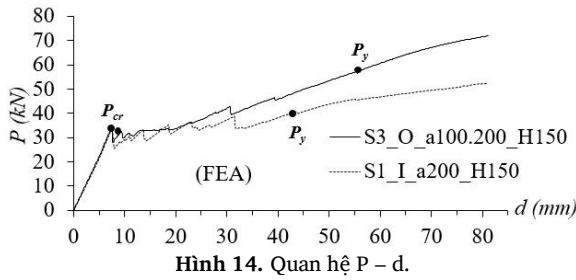
Độ cứng chống xoắn của hai mẫu ở giai đoạn I chênh lệch nhau dưới 2 %, chứng tỏ trong giai đoạn này độ cứng chống xoắn gần như không phụ thuộc vào hàm lượng cốt thép. Ở giai đoạn II, với mẫu S1, độ cứng chống xoắn giảm hơn 20 lần so với giai đoạn I, nhưng với mẫu S2 giảm chỉ hơn 10 lần, chứng tỏ hàm lượng cốt thép có ảnh hưởng lớn đến độ cứng chống xoắn ở giai đoạn II.

Từ các kết quả trên cho thấy, mô hình phân tích PTHH đã xây dựng là đủ độ tin cậy và mô hình này được dùng để khảo sát tham số.

5.3. Khảo sát ảnh hưởng của cốt thép trực hướng đến độ cứng chống xoắn

Mẫu khảo sát là S3_O_a100.200_H150, được bố trí cốt thép giống với mẫu S1, chỉ khác là khoảng cách giữa các thanh cốt thép theo hai phương khác nhau, một phương là 100 mm, phương còn lại là 200 mm, hàm lượng cốt thép 0,44 %.

Kết quả về quan hệ tải trọng - chuyển vị, mômen xoắn - độ xoắn, độ cứng chống xoắn của mẫu S3 được so sánh với mẫu S1, được thể hiện ở hình 14, hình 15 và bảng 4.



Bảng 3. Độ cứng chống xoắn của sàn S1 và S2.

Sàn	Thí nghiệm (EXP)			FEA			Nielsen [4]		
	$D_{xy,I}$ (kNm)	$D_{xy,II}$ (kNm)	$\frac{D_{xy,I}}{D_{xy,II}}$	$D_{xy,I}$ (kNm)	$D_{xy,II}$ (kNm)	$\frac{D_{xy,I}}{D_{xy,II}}$	$D_{xy,I}$ (kNm)	$D_{xy,II}$ (kNm)	$\frac{D_{xy,I}}{D_{xy,II}}$
S1_I_a200_H150	7718	326	23,7	7455	297	25,1	8294	274	30,3
S2_I_a100_H150	7883	748	10,5	7521	683	11,0	8359	372	22,5

Bảng 4. Độ xoắn và độ cứng chống xoắn của sàn S1 và S3.

Sàn	$\kappa_{xy,cr}$ (rad / m)	$\kappa_{yx,cr}$ (rad / m)	$\kappa_{xy,y}$ (rad / m)	$\kappa_{yx,y}$ (rad / m)	$D_{xy,I}$ (kNm)	$D_{xy,II}$ (kNm)	$\frac{D_{xy,I}}{D_{xy,II}}$
S1_I_a200_H150	0,00241	0,00241	0,01427	0,01427	7455	297	25,1
S3_O_a100.200_H150	0,00243	0,00243	0,02244	0,02244	7645	503	15,2

Từ hình 14 và hình 15 cho thấy, ứng xử của hai sàn trong giai đoạn I rất giống nhau, nhưng khác nhau ở giai đoạn II, vì sàn S1 có cốt thép dẹt hướng và hàm lượng cốt thép nhỏ hơn hàm lượng cốt thép của dầm S3 với cốt thép trục hướng. Cốt thép trong sàn S1 chảy dẻo trước cốt thép trong sàn S3. Từ bảng 3 nhận thấy, độ xoắn của sàn $\kappa_{xy} = \kappa_{yx}$, do đó $D_{xy} = D_{yx}$.

6. Kết luận

Bài báo đã trình bày một nghiên cứu về ảnh hưởng của hàm lượng cốt thép, và bố trí cốt thép dẹt hướng hoặc trục hướng đến ứng xử của sàn bê tông cốt thép chịu xoắn và độ cứng chống xoắn của sàn. Kết quả thí nghiệm và mô phỏng số rất gần nhau, đồng thời cũng khá gần với lời giải giải tích.

Hàm lượng cốt thép gần như không ảnh hưởng đến độ cứng chống xoắn ở giai đoạn I, nhưng ảnh hưởng rất lớn đến độ cứng chống xoắn ở giai đoạn II. Trước khi bê tông nứt, độ cứng chống xoắn của sàn khá lớn, nhưng sau khi bê tông nứt, đặc biệt đến giai đoạn cốt thép bắt đầu chảy dẻo, độ cứng chống xoắn của sàn giảm rất nhiều, bằng khoảng 1/25 đến 1/10 độ cứng chống xoắn ở giai đoạn I, mức độ giảm này phụ thuộc vào hàm lượng cốt thép. Tỷ lệ giảm độ cứng chống xoắn trong nghiên cứu này nhỏ hơn so với đề nghị của CEB là độ cứng chống xoắn sau nứt lấy bằng 10 % độ cứng chống xoắn ở giai đoạn đàn hồi.

Công thức xác định độ cứng chống xoắn của Nielsen chưa cho thấy rõ ảnh hưởng của hàm lượng cốt thép đến độ cứng chống xoắn ở giai đoạn II.

Cốt thép được bố trí dẹt hướng hay trục hướng không ảnh hưởng đến độ xoắn của sàn, nghĩa là độ xoắn κ_{xy} luôn bằng κ_{yx} .

Tài liệu tham khảo

- [1]. Kai-Uwe Bletzinger (2000). *Theory of Plates*. Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München.
- [2]. CEB (1985) Design manual on cracking and deformations. CEB, Bulletin d'Information n° 158, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse .
- [3]. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. 2nd Ed. NY: McGraw-Hill Companies. 0070647798.
- [4]. Nielsen, N. J. (1920). Beregning af Spændinger i Plader [Calculation of Stresses in Slabs]. G. E. C. Gad Copenhagen.
- [5]. Matri, P., ASCE, M. and Kong, K. (1987) "Response of reinforced concrete slab elements to torsion", *Journal of Structural Engineering*, 113(5): 976-993.
- [6]. Lopes, A. V., Lopes, S. M. R. and Carmo, R. N. F. D. (2014) "Stiffness of reinforced concrete slabs subjected to torsion", *Materials and Structures*, 47: 227-238.
- [7]. Marti, P., ASCE, M., Leesti, P. and Khalifa, W. U. (1987) "Torsion test on reinforced concrete slab elements", *Journal of Structural Engineering*, 113(5): 994-1010.
- [8]. ANSYS, Inc Theory reference, Release 15.0, Documentation for ANSYS.
- [9]. Nguyễn Mai Chí Trung, Phạm Phú Tình và Vương Ngọc Lưu (2016). "Phân tích ứng xử của sàn bê tông cốt thép chịu xoắn bằng phương pháp phần tử hữu hạn". Hội nghị Khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn biến dạng lần thứ XII, Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, tr. 1466-1473. ISBN: 978-604-913-459-3.
- [10]. Kachlakev, D., Miller, T., Yim, S., Chansawat, K., Potisuk, T. (2001). *Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Structures Strengthened with FRP Laminates*. Research Project Work Plan, SPR 316, Oregon Department of

Transportation, Washington.

- [11]. Desayi, P. and Krishnan, S. (1964) "Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete", *Journal of the American Concrete Institute*, 61(3): 345-350.
- [12]. Gere, J. M. and Timoshenko, S. P. (1997). *Mechanics of Materials*. 4th Ed. PWS Publishing Company, Boston, Massachusetts. 0534934293.
- [13]. AS 3600-2009 (2009). *Australian Standard: Concrete Structures*. Sydney, NSW 2001, Australia. 0733793479.
- [14]. Nilson, A. H., Darwin, D., Dolan, C. W. (2010). *Design of Concrete Structures*. 14th Ed. NY: McGraw-Hill Companies. 0073293490.
- [15]. Park, R. and Paulay, T. (1975). *Reinforced Concrete Structures*. A Wiley-Interscience Publication, Canada. 0471659177.
- [16]. M. C. T. Nguyen, P. T. Pham, and N. L. Vuong (2016). An experimental study on torsional stiffness of reinforced concrete slab. *The 7th International Conference of Asian Concrete Federation*. ISBN: 978-604-82-1994-9.
- [17]. M. C. T. Nguyen, and P. T. Pham (2017). An investigation on the behaviour and stiffness of reinforced concrete slabs subjected to torsion. *5th Global Conference on Materials Science and Engineering*, IOP Publishing, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, Vol. 164, doi:10.1088/1757-899X/164/1/012017.