VẬT LIỆU & XÂY DỰNG
Tạp chí Vật liệu và Xây dựng
ISSN 1859 - 381X
Website: www. jomc.vn

Mô hình giải tích dự báo khả năng chịu lực của cột mảnh bê tông cốt thép gia cường bằng cfrp chịu nén lệch tâm

Lê Phước Lành [1*], Nguyễn Trường Thắng [2], Nguyễn Trung Hiếu [3]

[1] Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp – Trường Đại học Xây dựng Hà Nội

TỪ KHOÁ

Cột mảnh BTCT
Hiệu ứng P-δ
Nén lệch tâm
Khuếch đại mô men
Gia cường CFRP
Phân tích phi tuyến

TÓM TẮT

Nghiên cứu này phát triển một mô hình giải tích tổng quát nhằm dự báo tải trọng cực hạn của cột mảnh BTCT gia cường vải sợi các bon CFRP chịu nén lệch tâm phẳng và lệch tâm xiên trong hệ khung giằng, có xét đến hiệu ứng bậc hai của cấu kiện (*P-δ)*. Mô hình được xây dựng dựa trên cơ sở lý thuyết của phương pháp khuếch đại mô men theo tiêu chuẩn Hoa Kỳ ACI 318-25, có xét đồng thời phi tuyến vật liệu và phi tuyến hình học thông qua quy trình phân tích lặp để xác định trạng thái cân bằng của cấu kiện. Mô hình được kiểm chứng với dữ liệu thực nghiệm của các nghiên cứu khác cho thấy có độ tin cậy cao. Khảo sát tham số được thực hiện trên các cột của khung giằng có tỷ số độ mảnh $\lambda_r = 30$, $\lambda_r = 50$ và $\lambda_r = 70$ dưới tải nén lệch tâm xiên đối xứng theo hai phương ($e_x = e_y$) với các giá trị độ lệch tâm 30 mm, 60 mm và 90 mm. Kết quả cho thấy, khả năng chịu lực của cột chịu ảnh đồng thời bởi độ lệch tâm và độ mảnh của cấu kiện. Trong phạm vi dải độ mảnh khảo sát, khi độ lệch tâm tăng từ 30 mm lên 90 mm, tải trọng cực hạn giảm khoảng 56,9 - 59,9 % đối với cấu hình gia cường kết hợp CFRP dọc và CFRP ngang, và 62,3 - 67,1% đối với cấu hình chỉ gia cường CFRP ngang. Việc bổ sung CFRP dọc giúp cải thiện khả năng chịu lực, với mức gia tăng lên tới 30,3 % tại $e_x = e_y = 90$ mm.

KEYWORDS

Slender RC column
P–δ effects
Eccentric compression
Moment magnification
CFRP strengthening
Nonlinear analysis

ABSTRACT

This study develops a generalized analytical model for predicting the critical load of carbon fiber-reinforced polymer (CFRP)-strengthened slender reinforced concrete (RC) columns subjected to uniaxial and biaxial eccentric compression in nonsway frames, considering member second-order effects (*P-δ*). The proposed model is formulated on the basis of the ACI 318-25 moment magnification method and incorporates both material and geometric nonlinearities through an iterative analysis procedure for determining the equilibrium state of the member. The analytical predictions are validated against experimental results reported in the literature, demonstrating good agreement and confirming the reliability of the proposed model. A parametric study is conducted on braced-frame columns with slenderness ratios of $\lambda_r = 30$, $\lambda_r = 50$ and $\lambda_r = 70$ under symmetric biaxial eccentric compression ($e_x = e_y$) with eccentricities of 30, 60, and 90 mm. The results indicate that the load-carrying capacity is governed by the combined effects of member slenderness and load eccentricity. Within the investigated slenderness range, increasing the eccentricity from 30 mm to 90 mm reduces the critical load by approximately 56.9 - 59.9 % for columns strengthened with combined longitudinal and transverse CFRP, and by 62.3 - 67.1% for columns strengthened with transverse CFRP only. Furthermore, the inclusion of longitudinal CFRP enhances the load-carrying capacity by up to 30.3% at $e_x = e_y = 90$ mm.

1. Tổng quan

Trong các công trình nhà dân dụng và công nghiệp, cột bê tông cốt thép (BTCT) có chiều cao lớn và tiết diện nhỏ ngày càng được sử dụng phổ biến nhằm đáp ứng yêu cầu về không gian kiến trúc và hiệu quả sử dụng vật liệu. Đặc điểm hình học của các cấu kiện này có thể làm cho ảnh hưởng của độ mảnh trở nên đáng kể trong ứng xử chịu lực của cột. Trong quá trình khai thác, các cột BTCT này có thể cần được gia cường nhằm đáp ứng yêu cầu thay đổi công năng sử dụng, gia tăng tải trọng hoặc khôi phục khả năng chịu lực bị suy giảm theo thời gian. Việc lựa chọn giải pháp gia cường phù hợp, đồng thời dự báo khả năng chịu lực của cấu kiện sau gia cường là yêu cầu quan trọng trong thiết kế kết cấu.

Theo tiêu chuẩn Hoa Kỳ ACI 318-25 [1], cột BTCT được phân thành cột ngắn và cột mảnh dựa trên mức độ ảnh hưởng của độ mảnh. Khi cấu kiện thỏa mãn các điều kiện giới hạn quy định tại Công thức (1-a) và (1-b), ảnh hưởng của độ mảnh được phép bỏ qua và cấu kiện được phân loại là cột ngắn; ngược lại, ảnh hưởng của độ mảnh

*Liên hệ tác giả: lanhlp@huce.edu.vn
Nhận ngày 01/06/2026, sửa xong ngày 03/07/2026, chấp nhận đăng ngày 06/07/2026
Link DOI: https://doi.org/10.54772/jomc.06.2026.1382

cần được xét đến và cấu kiện được phân loại là cột mảnh.

Đối với cột trong khung không giằng:

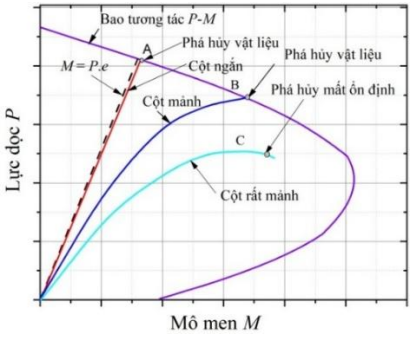
$$\frac{k \cdot l_u}{r} \leq 22 \quad \text{(1-a)}$$

Đối với cột trong khung có giằng:

$$\begin{cases} \frac{k \cdot l_u}{r} \leq 34 + 12 \cdot \left(\frac{M_1}{M_2}\right) \\ \frac{k \cdot l_u}{r} \leq 40 \end{cases} \quad \text{(1-b)}$$

trong đó: k là hệ số liên kết hai cầu cột ; l_u là chiều cao của cột ; $r$là bán kính quán tính của cột ; M_1 và M_2 lần lượt là mô men ở đầu cột và chân cột ; $\frac{M_1}{M_2}$có giá trị âm nếu cột bị uốn một chiều (uốn đơn), có giá trị dương nếu uốn theo hai chiều.

Cơ chế phá hoại của cột ngắn và cột mảnh được minh họa trong Hình 1. Đối với cột ngắn, tải trọng cực hạn chủ yếu được quyết định bởi khả năng chịu lực của tiết diện. Ngược lại, đối với cột mảnh chịu nén lệch tâm, sự phát triển của chuyển vị ngang δ dưới tác dụng của tải trọng nén P làm phát sinh hiệu ứng bậc hai (P-δ), tạo ra mô men thứ cấp ($M = P \cdot \delta$) và ảnh hưởng đến khả năng chịu lực của cấu kiện. Do đó, tải trọng cực hạn của cột mảnh phụ thuộc đồng thời vào khả năng chịu lực của tiết diện và ảnh hưởng của hiệu ứng bậc hai, khiến cấu kiện có thể phá hủy do vật liệu hoặc mất ổn định.



Hình 1. Phá hủy vật liệu và phá hủy mất ổn định của cột BTCT.

Để cải thiện khả năng chịu lực của cột mảnh BTCT, nhiều giải pháp gia cường đã được nghiên cứu và áp dụng, trong đó tấm vải composite cốt sợi các bon (Carbon Fiber Reinforced Polymer - CFRP) được sử dụng rộng rãi nhờ có cường độ chịu kéo cao, khối lượng nhẹ, và không bị ăn mòn trong môi trường xâm thực [2-4]. Đối với cột mảnh BTCT chịu nén lệch tâm, vải sợi CFRP gia cường theo phương dọc so với trục cột (CFRP dọc) không chỉ làm tăng sức kháng uốn của tiết diện mà còn làm thay đổi đáng kể độ cứng uốn hiệu dụng của cấu kiện. Ngược lại, vải sợi các bon CFRP gia cường theo phương ngang so với trục cột (CFRP ngang) chủ yếu cải thiện ứng xử bê tông vùng nén thông qua hiệu ứng kiềm chế biến dạng nở hông bê tông bởi CFRP. Do đó, gia cường bằng CFRP được xem là một trong những giải pháp hiệu quả nhằm nâng cao khả năng chịu lực của cột mảnh BTCT chịu nén lệch tâm.

Trong những năm gần đây, nhiều nghiên cứu thực nghiệm đã được thực hiện nhằm đánh giá ứng xử của cột mảnh BTCT gia cường CFRP chịu nén lệch tâm dưới các cấu hình gia cường khác nhau [5-9]. Kết quả nghiên cứu cho thấy CFRP có khả năng cải thiện đáng kể khả năng chịu lực, độ dẻo và cơ chế phá hoại của cột BTCT. Bên cạnh đó, nhiều mô hình giải tích cũng đã được phát triển nhằm dự báo khả năng chịu lực của cột mảnh BTCT. Các nghiên cứu tập trung vào đánh giá độ chính xác của các phương pháp khuếch đại mô men đơn giản hóa [10], mô hình hóa phi tuyến vật liệu–hình học cho cột mảnh BTCT sử dụng bê tông cường độ cao chịu nén lệch tâm xiên [11], và xây dựng biểu thức độ cứng uốn hiệu dụng (EI) của cột mảnh cho tiết diện bất kỳ [12]. Tuy nhiên, các mô hình giải tích này đều được xây dựng cho cột mảnh BTCT không gia cường CFRP. Như vậy, số lượng nghiên cứu mô hình giải tích trên cột mảnh BTCT gia cường CFRP chịu nén lệch tâm phẳng và lệch tâm xiên vẫn còn rất hạn chế, mặc dù đây là các trạng thái làm việc phổ biến trong thực tế gia cường.

Xuất phát từ khoảng trống nghiên cứu nêu trên, mục tiêu của bài báo này là phát triển một mô hình giải tích tổng quát dự báo tải trọng cực hạn của cột mảnh BTCT chịu nén lệch tâm phẳng và lệch tâm xiên được gia cường bằng tấm vải sợi các bon CFRP đơn hướng trong hệ khung có giằng, chỉ xét tới hiệu ứng bậc hai của cấu kiện (P-δ) theo hướng tiếp cận phương pháp khuếch đại mô men của tiêu chuẩn ACI 318-25 [1]. Mô hình được phát triển trên cơ sở tích hợp phân tích tiết diện phi tuyến với thuật toán gia tải-lặp, cho phép xác định tải trọng cực hạn dựa trên tiêu chí phá hoại vật liệu và điều kiện mất ổn định của cấu kiện cột, đồng thời được kiểm chứng bằng dữ liệu thực nghiệm của các tác giả khác đã công bố. Trên cơ sở mô hình giải tích đã được kiểm chứng, bài báo khảo sát ảnh hưởng của độ lệch tâm, độ mảnh và cấu hình gia cường CFRP dọc đến khả năng chịu lực của cột mảnh BTCT.

2. Mô hình giải tích tổng quát

2.1. Giả thiết và trường biến dạng của tiết diện

Mô hình tính toán được dựa trên các giả thiết sau: (i) Tiết diện phẳng trước và sau biến dạng, khi đó biến dạng dọc trục phân bố tuyến tính trên tiết diện; (ii) Không xảy ra hiện tượng bong tách hoặc trượt tương đối giữa các lớp vật liệu bê tông-cốt thép và CFRP-bê tông; (iii) Vải sợi các bon CFRP đơn hướng chỉ làm việc chịu kéo, bỏ qua mọi vùng CFRP dọc có biến dạng nén; (iv) Chỉ xét bê tông làm việc chịu nén; (v) Xét tới hiệu ứng bậc hai (P-δ) của cấu kiện đối với cột mảnh.

Với việc áp dụng giả thiết tiết diện phẳng trước và sau biến dạng, trường biến dạng dọc trục tại một điểm bất kỳ trên tiết diện $\varepsilon(x, y)$ được xác định như sau:

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_0 + \kappa_x \cdot y + \kappa_y \cdot x \quad (2)$$

trong đó: $\varepsilon_0$là biến dạng dọc trục tại tâm hình học tiết diện; κ_x, κ_y lần lượt là độ cong của tiết diện cột quanh trục x và trục y ; x và y lần lượt là tọa độ từ tâm phần tử đến tâm hình học tiết diện.

2.2. Rời rạc hóa tiết diện

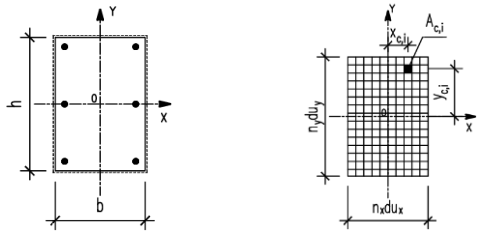
Tiết diện cột được rời rạc hóa thành 03 nhóm phần tử chính sau đây và được minh họa trên Hình 2:

- Phần tử bê tông: Chia bê tông thành n_c phân tố. Mỗi phân tố bê tông có: tọa độ trọng tâm ($x_{c,i}$, $y_{c,i}$), diện tích $A_{c,I}$ và ứng suất $\sigma_{c,i}$;

- Phần tử cốt thép: Rời rạc hóa cốt thép thành n_s thanh thép. Mỗi thanh cốt thép có: tọa độ trọng tâm ($x_{s,j}$, $y_{s,j}$), diện tích $A_{s,j}$ và ứng suất $\sigma_{s,j}$;

- Phần tử CFRP dọc: Chia thành n_k phân tố. Mỗi phân tố CFRP dọc có: tọa độ tâm ($x_{f,k}$, $y_{f,k}$), diện tích $A_{f,k}$ và ứng suất $\sigma_{f,k}$.

Với giả thiết bám dính tuyệt đối giữa bê tông-cốt thép, CFRP dọc-bê tông nên cốt thép và CFRP dọc nhận cùng trường biến dạng với bê tông tại cùng một vị trí trên tiết diện.



(a) Tiết diện cột (b) Chia tiết diện BT

(c) Chia cốt thép (d) Chia CFRP dọc

Hình 2. Rời rạc hóa tiết diện cột.

2.3. Mô hình vật liệu

2.3.1. Bê tông bị kiềm chế nở hông bởi CFRP

Khi cột BTCT được gia cường bằng tấm vải sợi các bon CFRP ngang thì làm gia tăng cường độ nén bê tông. Áp dụng mô hình quan hệ ứng suất-biến dạng của tác giả Lam và Teng [13-14] cho bê tông bị kiềm chế nở hông bởi CFRP. Tại tọa độ trọng tâm $(x_{c,i}, y_{c,i})$ của phần tử bê tông thứ i, biến dạng $\varepsilon_{c,i}$ được tính theo công thức (2) và ứng suất $\sigma_{c,i}$ được xác định tương ứng theo các biểu thức (3-a) đến (3-c).

$$\sigma_{c,i} = E_c \cdot \varepsilon_{c,i} - \frac{(E_c - E_2)^2}{4 \cdot f_{co}^{'}} \cdot \varepsilon_{c,i}^2 \quad \text{khi } 0 \le \varepsilon_{c,i} \le \varepsilon_t^{'} \quad (3\text{-a})$$

$$\sigma_{c,i} = f_{co}^{'} + E_2 \cdot \varepsilon_{c,i} \quad \text{khi } \varepsilon_t^{'} \le \varepsilon \le \varepsilon_{ccu} \quad (3\text{-b})$$

$$\sigma_{c,i} = 0 \quad \text{khi } \varepsilon_{c,i} \le 0 \quad (3\text{-c})$$

trong đó: $f_{co}^{'}$ là cường độ nén cực hạn của bê tông không bị kiềm chế nở hông ; E_c là mô đun đàn hồi của bê tông ; $\varepsilon_t^{'}$ là biến dạng chuyển tiếp giữa đoạn parabol ban đầu và đoạn tuyến tính thứ hai của đường cong ứng suất-biến dạng và được tính toán theo biểu thức sau:

$$\varepsilon_t^{'} = \frac{2 \cdot f_{co}^{'}}{E_c - E_2} \quad (4)$$

trong đó: E_2 là độ dốc của đường tuyến tính thứ hai của đường cong ứng suất-biến dạng và được tính toán theo biểu thức sau:

$$E_2 = \frac{f_{cc}^{'} - f_{co}^{'}}{\varepsilon_{ccu}} \quad (5)$$

trong đó: $f_{cc}^{'}$ và ε_{ccu} lần lượt là cường độ nén cực hạn và biến dạng nén cực hạn của bê tông bị kiềm chế nở hông bởi CFRP và được tính toán theo mô hình đề xuất của tác giả Lam và Teng [14].

2.3.2. Cốt thép dọc

Tham chiếu theo tiêu chuẩn Hoa Kỳ ACI 318-25 [1], mô hình quan hệ ứng suất-biến dạng của cốt thép được mô hình bằng quan hệ đàn-dẻo lý tưởng, tại tọa độ trọng tâm $(x_{s,j}, y_{s,j})$ của thanh cốt thép dọc thứ j, biến dạng $\varepsilon_{s,j}$ được tính theo biểu thức (2). Khi đó, ứng suất trong thanh thép thứ j là $\sigma_{s,j}$được xác định theo biểu thức (6-a) đến (6-c).

$$\sigma_{s,j} = \varepsilon_{s,j} \cdot E_s \quad \text{khi } |\varepsilon_{s,j}| \le \varepsilon_y \quad (6\text{-a})$$

$$\sigma_{s,j} = f_y \quad \text{khi } \varepsilon_y < \varepsilon_{s,j} \le \varepsilon_{su} \quad (6\text{-b})$$

$$\sigma_{s,j} = -f_y \quad \text{khi } -\varepsilon_{su} < \varepsilon_{s,j} \le -\varepsilon_y \quad (6\text{-c})$$

trong đó: f_y là giới hạn chảy của cốt thép ; ε_y và ε_{su} lần lượt là biến dạng dẻo và biến dạng kéo đứt cốt thép ; E_s là mô đun đàn hồi của cốt thép.

2.3.3. Vải sợi các bon CFRP dọc

Vải sợi các bon CFRP dọc bị phá hủy đứt sợi đột ngột khi đạt đến biến dạng kéo cực hạn. Áp dụng mô hình vật liệu đàn hồi tuyến tính cho tấm vải sợi các bon CFRP dọc. Tại vị trí trọng tâm $(x_{f,k}, y_{f,k})$của phần từ CFRP dọc thứ k, biến dạng $\varepsilon_{f,k}$ được tính theo biểu thức (2), trong khi ứng suất trong CFRP dọc $\sigma_{f,k}$ được xác định như sau:

$$\sigma_{f,k} = \varepsilon_{f,k} \cdot E_f \quad \text{khi } -\varepsilon_{fe} \le \varepsilon_{f,k} < 0 \quad (7\text{-a})$$

$$\sigma_{f,k} = 0 \quad \text{khi } \varepsilon_{f,k} \ge 0 \quad (7\text{-b})$$

trong đó: E_f là mô đun đàn hồi của CFRP ; ε_{fe}là biến dạng hữu hiệu của CFRP và được tính toán theo biểu thức (8).

$$\varepsilon_{fe} = \kappa_e \varepsilon_{fu} \quad (8)$$

trong đó: ε_{fu} là biến dạng kéo đứt CFRP ; κ_e là hệ số biến dạng hữu hiệu CFRP.

2.4. Cân bằng tại một cấp tải có xét đến hiệu ứng bậc hai (P-δ)

2.4.1. Mô men bậc một do độ lệch tâm ban đầu

Tại cấp tải P_i, độ lệch tâm ban đầu e_x và e_y lần lượt là khoảng cách từ điểm đặt lực P_i đến trục y và trục x trong hệ trục tọa độ xOy, với O là gốc tọa độ đặt tại trọng tâm tiết diện. Khi đó, mô men bậc một quay quanh trục x và trục y tại vòng lặp thứ $k = 0$ lần lượt là $M_{x,req}^{(0)}$và $M_{x,req}^{(0)}$ được tính toán theo biểu thức (9-a) và (9-b).

$$M_{x,req}^{(0)} = P_i \cdot e_y \quad (9\text{-a}); \quad M_{y,req}^{(0)} = P_i \cdot e_x \quad (9\text{-b})$$

2.4.2. Hiệu ứng bậc hai (P-δ) và mô men khuếch đại

Do có sự chuyển vị ngang của cột, tại mỗi cấp tải P_i phát sinh một mô men thứ cấp tương ứng. Tham chiếu tiêu chuẩn ACI 318-25

[1], mô men thiết kế được xác định bằng cách khuếch đại mô men bậc một. Tại vòng lặp hình học thứ k, mô men khuếch đại quanh trục x và trục y lần lượt được xác định theo các biểu thức (10-a) và (10-b).

$$M_{x,req}^{(k)} = \delta_x^{(k)} M_{x,req}^{(0)} \quad (10\text{-a}); \; M_{y,req}^{(k)} = \delta_y^{(k)} M_{y,req}^{(0)} \quad (10\text{-b})$$

trong đó: $\delta_x^{(k)}$và $\delta_y^{(k)}$ lần lượt là hệ số khuếch đại mô men uốn quanh trục x và trục y tại vòng lặp thứ k.

2.4.3. *Điều kiện cân bằng tĩnh học tại tiết diện*

Tại mỗi vòng lặp hình học k của cấp tải P_i, điều kiện cân bằng tĩnh học được thiết lập thỏa mãn điều kiện nội lực cân bằng với ngoại lực như sau:

$$\begin{cases} P\sum_{i=1}^{n}\sigma_{c,i}A_{c,i} + \sum_j \sigma_{s,j}A_{s,j} + \sum_k \sigma_{f,k}A_{f,k} = P_{i,req} \\ M\sum_{i=1}^{n}\sigma_{c,i}A_{c,i}y_i + \sum_j \sigma_{s,j}A_{s,j}y_j + \sum_k \sigma_{f,k}A_{f,k}y_k = M_{x,req}^{(k)} \\ M\sum_{i=1}^{n}\sigma_{c,i}A_{c,i}x_i + \sum_j \sigma_{s,j}A_{s,j}x_j + \sum_k \sigma_{f,k}A_{f,k}x_k = M_{y,req}^{(k)} \end{cases} \quad (11)$$

$$_{int} \qquad _{x,int} \qquad _{y,int}$$

trong đó: $P(\kappa)_{int}$, $M(\kappa)_{x,int}$ và $M(\kappa)_{y,int}$ là các thành phần nội lực lần lượt là lực dọc, mô men quanh trục x và mô men quanh trục y.

Trong nghiên cứu này, độ cứng uốn hiệu dụng của cột không tính toán theo các biểu thức thực nghiệm trong ACI 318-25 [1] dùng trong thực hành thiết kế cột BTCT không gia cường CFRP, mà sẽ được cập nhật trực tiếp từ quan hệ mô men-độ cong của tiết diện cột được gia cường CFRP tại mỗi trạng thái cân bằng. Do vậy, sau khi tìm được nghiệm cân bằng tại vòng hình học k theo biểu thức (11), độ cứng uốn hiệu dụng của cột quanh trục x và trục y tại vòng lặp thứ k lần lượt là $(EI)_{eff,x}^{(k)}$ và $(EI)_{eff,y}^{(k)}$ được xác định theo biểu thức (12-a) và (12-b).

$$(EI)_{eff,x}^{(k)} = \frac{M_{x,int}^{(k)}}{\kappa_x^{(k)}} \quad (12\text{-a}); \; (EI)_{eff,y}^{(k)} = \frac{M_{x,int}^{(k)}}{\kappa_y^{(k)}} \quad (12\text{-b})$$

trong đó: $\kappa_x^{(k)}$ và $\kappa_y^{(k)}$ lần lượt là độ cong của tiết diện cột quanh trục x và trục y tại vòng lặp thứ k. Các thành phần độ cong này được xem là các ẩn số của bài toán cân bằng tiết diện và được xác định lặp phi tuyến thông qua thuật toán tối ưu Nelder-Mead trong MATLAB [15].

Tải trọng tới hạn Euler tương ứng cho cột của khung giằng theo từng phương x và y được xác định lần lượt theo biểu thức (13-a) và (13-b).

$$P_{c,x}^{(k)} = \frac{\pi^2 (EI)_{eff,x}^{(k)}}{(k_{ux}L)^2} \quad (13\text{-a}); \; P_{c,y}^{(k)} = \frac{\pi^2 (EI)_{eff,y}^{(k)}}{(k_{uy}L)^2} \quad (13\text{-b})$$

trong đó: k_{ux} và k_{uy} lần lượt là các hệ số thể hiện liên kết hai đầu cột theo phương x và phương y; L là chiều cao của cột.

Dựa trên cơ sở lý thuyết của phương pháp khuếch đại mô men của tiêu chuẩn ACI 318-25 [1], trong công thức tính toán hệ số khuếch đại mô men có hệ số an toàn 0,75 được sử dụng để giảm tải trọng tới hạn Euler trong thực hành thiết kế. Về bản chất, hệ số 0,75 là hệ số giảm thực nghiệm nhằm xét sự suy giảm độ cứng thực tế của cột BTCT so với mô hình Euler đàn hồi lý tưởng. Trong nghiên cứu hiện tại, sự suy giảm độ cứng được mô phỏng trực tiếp thông qua thuật toán lặp-hội tụ nên không sử dụng hệ số an toàn 0,75. Do đó, hệ số khuếch đại mô men quanh trục x và trục y tại vòng lặp thứ $(k+1)$ được xác định theo biểu thức (14-a) và (14-b).

$$\delta_x^{(k+1)} = \frac{C_{m,x}}{1-\frac{P_i}{P_{c,x}^{(k)}}} \quad (14\text{-a}); \; \delta_y^{(k+1)} = \frac{C_{m,y}}{1-\frac{P_i}{P_{c,y}^{(k)}}} \quad (14\text{-b})$$

trong đó: $C_{m,x}$ và $C_{m,y}$ lần lượt là hệ số điều chỉnh mô men quanh trục x và quanh trục y và được tính toán theo biểu thức (15-a) và (15-b).

$$C_{m,x} = 0{,}6 - 0{,}4 \cdot \frac{M_{1,x}}{M_{2,x}} \quad (15\text{-a})$$

$$C_{m,y} = 0{,}6 - 0{,}4 \cdot \frac{M_{1,y}}{M_{2,y}} \quad (15\text{-b})$$

trong đó: $M_{1,x}$, $M_{1,y}$ lần lượt là mô men tại đầu cột uốn quanh trục x và trục y; $M_{2,x}$, $M_{2,y}$ lần lượt là mô men tại chân cột uốn quanh trục x và trục y; $\frac{M_{1,x}}{M_{2,x}}$và $\frac{M_{1,y}}{M_{2,y}}$ có giá trị âm nếu cột bị uốn một chiều (uốn đơn), có giá trị dương nếu uốn theo hai chiều.

2.5. *Hội tụ hình học*

Vòng lặp hình học nhằm xác định trạng thái ổn định của cột và được coi là hội tụ khi thỏa mãn sai số của hệ số khuếch đại mô men quanh trục x và trục y tại vòng lặp thứ $(k+1)$ và thứ k như sau:

$$max\left(\left|\delta_x^{(k+1)} - \delta_x^{(k)}\right|, \left|\delta_y^{(k+1)} - \delta_y^{(k)}\right|\right) \le 10^{-4} \quad (16)$$

Xét N vòng lặp, nếu không hội tụ sau số vòng lặp cho phép N tức đang phản ánh hệ số khuếch đại mô men tăng rất mạnh và trạng thái tại cấp tải P_i được coi là mất ổn định do hiệu ứng bậc hai (P-δ). Khi đó, tải trọng cực hạn của cột được xác định tại P_i và cơ chế phá hoại của cấu kiện cột là do mất ổn định.

2.6. *Tiêu chí phá hoại vật liệu*

Sau khi hội tụ hình học tại cấp tải P_i, tiêu chí phá hoại vật liệu được đánh giá thông qua hệ số sử dụng vật liệu r. Hệ số sử dụng vật liệu r của bê tông, cốt thép và CFRP dọc lần lượt là r_c, r_s và r_f được tính theo các biểu thức sau:

$$r_c = \frac{\max_i \varepsilon_{c,i}}{\varepsilon_{ccu}} \quad (17\text{-a})$$

$$r_s = \frac{\max_j |\varepsilon_{s,j}|}{\varepsilon_{su}} \quad (17\text{-b})$$

$$r_f = \frac{\max_k |\varepsilon_{f,k}|}{\varepsilon_{fe}} \quad (17\text{-c})$$

Việc quyết định việc tăng tiếp tải trọng phụ thuộc vào hệ số sử dụng vật liệu, cụ thể như sau: (i) Nếu $r = max(r_c, r_s, r_f) < 1$ thì tiếp tục tăng tải lên cấp $P_{i+1,req} = P_{i,req} + \Delta P$; (ii) Nếu $r = max(r_c, r_s, r_f) \ge 1$ thì dừng tính toán và cấu kiện cột BTCT bị phá hoại bởi vật liệu. Khi đó tải trọng cực hạn được xác định là tải trọng cần thỏa mãn đảm bảo điều kiện cân bằng và thỏa mãn điều kiện sau:

$$r = 1 \text{ hoặc } |r - 1| \le 10^{-6} \quad (18)$$

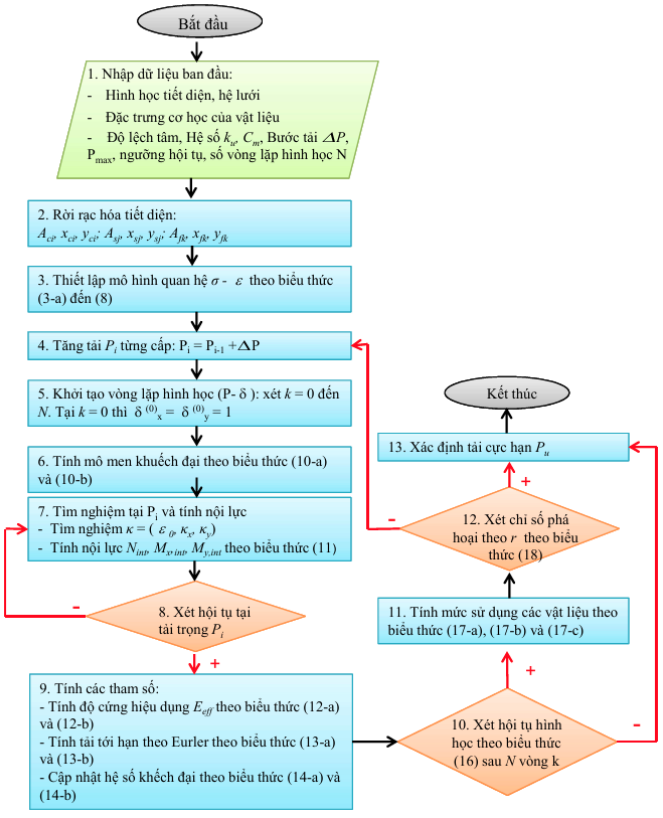
2.7. *Thuật toán tính toán*

Để dự báo khả năng chịu lực của cột mảnh BTCT chịu nén lệch tâm phẳng và lệch tâm xiên được gia cường bằng vải sợi các bon CFRP có xét hiệu ứng bậc hai (P-δ), một thuật toán giải tích dựa trên phân tích tiết diện phi tuyến và lặp hình học được xây dựng và giải trên phần mềm MATLAB [15] bằng thuật toán tối ưu Nelder-Mead. Biểu đồ thuật toán được thể hiện chi tiết trong Hình 3.

3. Kiểm chứng mô hình giải tích

Mô hình giải tích trên được kiểm chứng với kết quả của ba nghiên cứu thực nghiệm trên các cột mảnh BTCT được gia cường bằng CFRP chịu nén lệch tâm phẳng và lệch tâm xiên của các tác giả Pedram Sadeghian và cs [5], Wonsiri Punurai và cs [6], Alireza Rahai và cs [7]. Việc so sánh giữa kết quả được tính toán từ mô hình giải tích được thiết lập ở Mục 2 với các kết quả từ thực nghiệm tập trung chính vào tải trọng cực hạn nhằm đánh giá độ chính xác của mô hình và kết quả được trình bày chi tiết trong Bảng 1. Trong quá trình tính toán theo thuật toán ở Hình 3, các tham số số học như mật độ chia nhỏ tiết diện bê tông và CFRP, số bước gia tải và tiêu chuẩn hội tụ của quá trình lặp cũng được khảo sát nhằm bảo đảm tính ổn định và độ tin cậy của nghiệm thu được.

Kết quả so sánh trong Bảng 1 cho thấy, giá trị trung bình của tỷ số tải trọng cực hạn tính theo mô hình giải tích so với thực nghiệm ($\frac{P_{u,cal}}{P_{u,exp}}$) là MV = 1,02 với độ lệch chuẩn SD = 0,12 chứng tỏ mô hình giải tích có khả năng dự báo tốt đối với tập dữ liệu kiểm chứng. Mặc dù vẫn tồn tại một vài mẫu có mức sai khác tương đối lớn, các tỷ số $P_{u,cal}/\ P_{u,exp}$ phân bố ở cả hai phía của giá trị 1,0 trên các bộ dữ liệu kiểm chứng. Cụ thể, mô hình có xu hướng dự báo cao hơn đối với bộ số liệu của Pedram Sadeghian và cộng sự [5], thấp hơn đối với bộ số liệu của Alireza Rahai và cộng sự [7], trong khi các kết quả của Wonsiri Punurai và cộng sự [6] phân bố xung quanh giá trị 1,0. Do đó, các trường hợp mẫu có sai khác lớn được xem là phản ánh mức độ phân tán của kết quả kiểm chứng, thay vì phản ánh xu hướng dự báo chung của mô hình giải tích trên toàn bộ tập dữ liệu kiểm chứng.

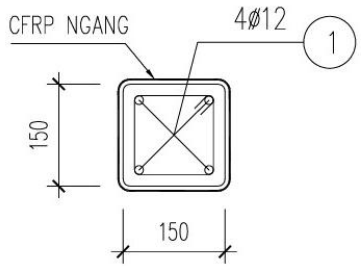


Hình 3. Thuật toán dự báo tải trọng cực hạn của cột mảnh BTCT chịu nén lệch tâm được gia cường CFRP.

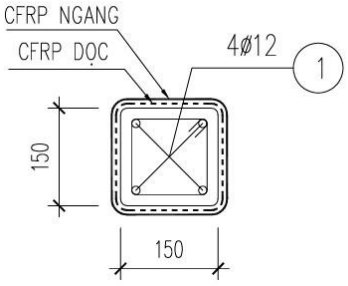
Bảng 1. So sánh kết quả mô hình giải tích tổng quát và thực nghiệm.

Tác giả	Cột mảnh	Độ mảnh	Độ lệch tâm (mm)		Số lớp CFRP		Tải trọng cực hạn P_u (kN)		$P_{u,ca}/$ $P_{u,exp}$
		λ_r	e_x	e_y	n_{f_ngang}	n_{f_doc}	$P_{u,exp}$	$P_{u,cal}$	
Pedram Sadeghian và cs [5]	S200-L2T	31,2	200	-	1	2	491,00	562,00	1,14
	S200-L4T	31,2	200	-	1	4	600,00	710,00	1,18
	S300-L2T	31,2	300	-	1	2	284,00	303,00	1,07
	S300-L4T	31,2	300	-	1	4	356,00	420,00	1,18
Wonsiri Punurai và cs [6]	C2	55,6	50,8	50,8	1	-	35,60	39,98	1,12
	C3	55,6	50,8	50,8	-	1	43,60	42,80	0,98
	C4	55,6	50,8	50,8	2	-	43,70	40,00	0,92
	C5	55,6	50,8	50,8	1	1	45,00	46,50	1,03
Alireza Rahai và cs [7]	S-225-75-L	53,1	75	225	-	1	296,69	310,00	1,04
	S-225-75-T	53,1	75	225	1	-	274,62	274,30	1,00
	S-225-75-LT	53,1	75	225	1	1	352,78	328,75	0,93
	S-300-70-LLT	53,1	70	300	1	2	372,62	304,00	0,82
	S-300-70-TTTT	53,1	70	300	4	-	257,30	228,00	0,89
Trung bình $MV = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{P_{u,cal,i}}{P_{u,exp,i}}\right)$									1,02
Độ lệch chuẩn $SD = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{P_{u,cal,i}}{P_{u,exp,i}} - MV\right)^2}$									0,12
Ghi chú: Độ mảnh của các cột thực nghiệm $\lambda_r = \frac{k \cdot l_u}{r}$									

4. Khảo sát ảnh hưởng của độ lệch tâm, độ mảnh và CFRP dọc



(a) Cấu hình gia cường 01 lớp CFRP ngang



(b) Cấu hình gia cường kết hợp 01 lớp CFRP ngang và 01 lớp CFRP dọc

Hình 4. Mặt cắt cột BTCT khảo sát được gia cường CFRP.

Mô hình giải tích tổng quát được kiểm chứng và cho thấy độ chính xác cao, một nghiên cứu phân tích tham số được thực hiện nhằm khảo sát: (i) Ảnh hưởng đồng thời của độ mảnh và độ lệch tâm tải trọng và (ii) Vai trò của CFRP dọc đến hiệu ứng bậc hai (*P-δ*) của cột mảnh BTCT chịu nén lệch tâm được gia cường bằng CFRP.

Khảo sát cột mảnh BTCT có kích thước tiết diện $b \times h = 150 \times 150$ mm, bán kính bo góc $r_c = 15$ mm trong hệ khung giằng, có giá trị mô men đầu cột và chân cột bằng nhau ($M_1 = M_2$) và xét trường hợp uốn đơn, cường độ nén của bê tông trên mẫu trụ ở tuổi 28 ngày tuổi là 25 MPa. Cốt thép dọc gồm 4Φ12, giới hạn chảy của cốt thép là 420 MPa, mô đun đàn hồi của cốt thép $E_s = 200000$ MPa, biến dạng dẻo ε_y và biến dạng kéo đứt ε_{su} của cốt thép dọc lần lượt là 2,1 % và 16,0 %. Vật liệu vải sợi các bon CFRP đơn hướng có chiều dày $t_f = 0{,}167$ mm, mô đun đàn hồi của CFRP $E_f = 245000$ MPa, biến dạng dài kéo đứt của CFRP là $\varepsilon_f = 1{,}6$ %. Xét hai cấu hình gia cường cột BTCT gồm: (i) Gia cường 01 lớp CFRP ngang; và (ii) Gia cường 01 lớp CFRP ngang kết hợp 01 lớp CFRP dọc. Các cột được gia cường theo toàn bộ chiều cao cột và có mặt cắt tiết diện được thể hiện trên Hình 4. Cột có độ mảnh λ_r được xác định theo biểu thức (1-b) và chịu nén lệch tâm xiên có hướng góc tải trọng là 45^0 với $e_x = e_y$. Tham số độ mảnh khảo sát với ba giá trị đại diện của độ mảnh $\lambda_r = 30$; $\lambda_r = 50$ và $\lambda_r = 70$, trong khi độ lệch tâm được chọn ở ba mức 30 mm, 60 mm và 90 mm (tương ứng $\frac{e_x}{h} = \frac{e_y}{h} = 0{,}2$; $\frac{e_x}{h} = \frac{e_y}{h} = 0{,}4$ và $\frac{e_x}{h} = \frac{e_y}{h} = 0{,}6$) đại diện các trạng thái từ nén chi phối đến uốn chi phối tạo thành ma trận tổ hợp gồm 18 mẫu cột được khảo sát (ứng với 02 cấu hình gia cường cột BTCT).

Các cột được tính toán theo mô hình giải tích được trình bày trong Mục 2. Kết quả khảo sát được trình bày thông qua năm biểu đồ gồm: Hai biểu đồ đường ứng với hai cấu hình gia cường (Hình 5), một biểu đồ thể hiện mức tăng tải trọng cực hạn do CFRP dọc (Hình 6), cùng với biểu đồ bề mặt 3D (Hình 7) và biểu đồ đường đẳng trị (Hình 8) cho cấu hình gia cường có CFRP dọc. Các kết quả này cho phép đánh giá toàn diện ảnh hưởng của độ lệch tâm, độ mảnh và vai trò của CFRP dọc.

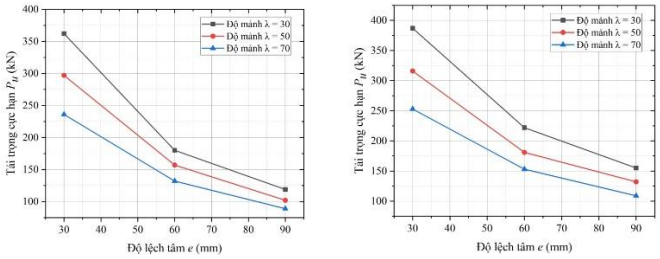
Hình 5(a) ứng với cấu hình gia cường 01 lớp CFRP ngang và Hình 5(b) ứng với cấu hình gia cường 01 CFRP ngang và 01 lớp CFRP dọc cho thấy, tải trọng cực hạn P_u giảm rõ rệt khi độ lệch tâm tăng từ 30 mm lên 90 mm đối với mọi giá trị độ mảnh λ_r. Cụ thể, trong Hình 5(a), tại $\lambda_r = 30$, P_u giảm từ 362 kN xuống 119 kN (giảm 67,1 %); tại $\lambda_r = 50$, giảm từ 297 kN xuống 102 kN (65,7 %); và tại $\lambda_r = 70$, giảm từ 236 kN xuống 89 kN (62,3 %). Trong khi đó, Hình 5(b) cho thấy mức suy giảm tương ứng nhỏ hơn khi có CFRP dọc, lần lượt là 59,9 %; 58,2 % và 56,9 %. Như vậy, độ lệch tâm là yếu tố chi phối chính làm suy giảm khả năng chịu lực, đồng thời CFRP dọc góp phần làm giảm tốc độ của sự suy giảm này.

Xét theo độ mảnh λ_r, tại cùng một độ lệch tâm, tải trọng cực hạn giảm đáng kể khi λ_r tăng từ 30 lên 70. Trong Hình 5(b) ứng với cấu hình gia cường 01 lớp CFRP ngang, tại độ lệch tâm 90 mm, P_u giảm từ 155 kN xuống 109 kN (giảm 29,7 %), trong khi trong Hình 5(a) ứng với cấu hình gia cường kết hợp 01 lớp CFRP ngang và 01 lớp CFRP dọc, giá trị tương ứng giảm từ 119 kN xuống 89 kN (giảm 25,2 %). Điều này phản ánh sự gia tăng của hiệu ứng bậc hai (*P-δ*) trong cột mảnh, đặc biệt khi kết hợp với lệch tâm lớn.

Vai trò của CFRP dọc được thể hiện rõ trong Hình 6 thông qua mức tăng tải trọng cực hạn giữa cấu hình gia cường kết hợp 01 lớp CFRP ngang và 01 lớp CFRP dọc so với cấu hình gia cường 01 lớp CFRP ngang. Tại độ lệch tâm nhỏ 30 mm, mức tăng chỉ dao động từ 6,4 % đến 7,2 %, cho thấy CFRP dọc hầu như không đóng vai trò đáng kể khi cột làm việc gần trạng thái nén đúng tâm. Tuy nhiên, khi độ lệch tâm tăng lên 60 mm, mức tăng đã đạt từ 15,3 đến 23,3 %, và tại $e_x = e_y = 90$ mm, giá trị này tăng mạnh lên từ 22,5 đến 30,3 %.

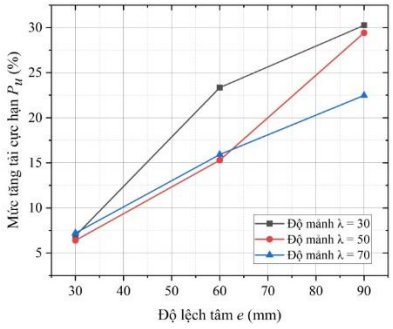
Tại cùng một độ lệch tâm lớn ($e_x = e_y = 90$ mm), hiệu quả của CFRP dọc có xu hướng giảm khi λ_r tăng, từ 30,3 % (khi $\lambda_r = 30$) xuống 22,5 % (khi $\lambda_r = 70$). Điều này cho thấy mặc dù CFRP dọc có tác dụng làm tăng độ cứng uốn và hạn chế chuyển vị ngang, nhưng trong các cột có độ mảnh lớn, hiệu ứng mất ổn định hình học vẫn chi phối, làm suy giảm hiệu quả gia cường.

Hình 7 và Hình 8 trình bày sự biến thiên của P_u theo hai tham số e và λ_r đối với cấu hình gia cường có CFRP dọc. Biểu đồ bề mặt 3D (Hình 7) cho thấy tải trọng cực hạn giảm liên tục từ vùng độ lệch tâm và độ mảnh nhỏ ($P_u = 387$ kN) đến vùng độ lệch tâm và độ mảnh lớn ($P_u = 109$ kN), tương ứng mức suy giảm tổng thể khoảng 71,8 %.

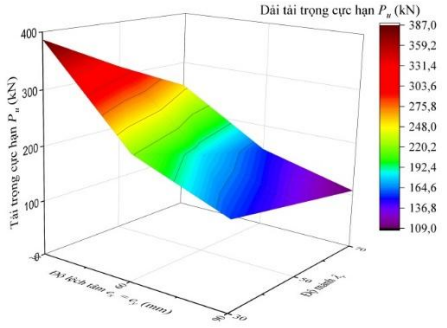


(a) Gia cường CFRP ngang (b) Gia cường kết hợp CFRP ngang và dọc

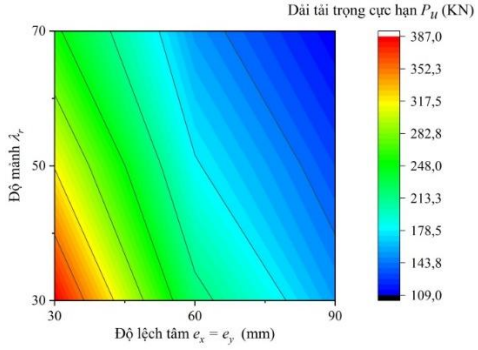
Hình 5. Quan hệ giữa tải trọng cực hạn và độ lệch tâm đối với các độ mảnh.



Hình 6. Mức tăng (%) của tải trọng cực hạn do CFRP dọc theo độ lệch tâm.



Hình 7. Biểu đồ bề mặt 3D của tải trọng cực hạn theo độ lệch tâm và độ mảnh (cấu hình gia cường kết hợp CFRP ngang và dọc).



Hình 8. Biểu đồ đường đẳng trị của tải trọng cực hạn theo độ lệch tâm và độ mảnh (cấu hình gia cường kết hợp CFRP ngang và dọc).

Biểu đồ đường đẳng trị (Hình 8) cho thấy các đường đồng mức có xu hướng dốc theo cả hai phương, chứng tỏ ảnh hưởng của độ lệch tâm và độ mảnh là đồng thời và không thể tách rời. Mật độ đường đẳng trị tăng nhanh theo phương độ lệch tâm tại các giá trị độ mảnh lớn, phản ánh độ nhạy cao của tải trọng cực hạn đối với lệch tâm trong cột mảnh.

5. Kết luận

Trên cơ sở phân tích các kết quả thu được trong phạm vi nghiên cứu, có thể rút ra một số kết luận chính như sau:

- Một mô hình giải tích tổng quát đã được phát triển nhằm dự báo khả năng chịu lực của cột mảnh BTCT chịu nén lệch tâm phẳng và lệch tâm xiên được gia cường bằng tấm vải sợi các bon CFRP, có xét hiệu ứng bậc hai của cấu kiện (P-δ) cho kết quả phù hợp và độ tin cậy cao;

- Ứng xử của cột mảnh BTCT chịu nén lệch tâm chịu sự chi phối bởi tương tác giữa độ lệch tâm và độ mảnh, trong đó sự gia tăng đồng thời của hai tham số này làm suy giảm đáng kể khả năng chịu lực và chuyển dần từ cơ chế nén chi phối sang uốn chi phối;

- Độ lệch tâm là yếu tố chi phối chính đến khả năng chịu lực của cột mảnh BTCT gia cường CFRP. Khi độ lệch tâm tăng từ 30 mm lên 90 mm thì tải trọng cực hạn suy giảm đáng kể, khoảng 56,9 - 59,9 % đối với cấu hình gia cường kết hợp 01 lớp CFRP dọc và 01 lớp CFRP ngang, và khoảng 62,3 - 67,1 % đối với cấu hình chỉ gia cường 01 lớp CFRP ngang, tương ứng khi độ mảnh λ_r thay đổi từ 30 đến 70.

- Việc bổ sung CFRP dọc làm tăng tải trọng cực hạn P_u từ khoảng 6,4 – 7,2 % tại e = 30 mm và khoảng 22,5 - 30,3 % tại e = 90 mm khi λ_r thay đổi từ 30 đến 70, đồng thời làm giảm tốc độ suy giảm tải trọng theo độ lệch tâm, cho thấy CFRP dọc đóng vai trò kiểm soát độ cứng uốn và hạn chế hiệu ứng bậc hai (P-δ).

Tài liệu tham khảo

[1]. American Concrete Institute, *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI 318-25)*. Farmington Hills, MI, USA: American Concrete Institute, 2025.

[2]. Nguyễn Thanh Hưng, Nguyễn Sỹ Hùng, Vương Hoàng Thạch, Lê Phạm Thanh Khương, "Ứng xử của dầm bê tông cốt thép tái chế có sử dụng phụ gia tro bay được gia cường bằng CFRP", *Tạp chí Vật liệu và Xây dựng*, tập 13, số 1, tr. 77–81, 2023.

[3]. ACI Committee 440, *State-of-the-Art Report on Fiber Reinforced Plastic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures (ACI 440R-96)*. Farmington Hills, MI, USA: American Concrete Institute, 1996.

[4]. ISIS Canada Research Network, *Design Manual No. 3: Reinforcing Concrete Structures with Fibre Reinforced Polymers*. Winnipeg, MB, Canada: ISIS Canada Corporation, 2007.

[5]. P. Sadeghian, A. Rahai, and M. R. Ehsani, "Experimental study of rectangular RC columns strengthened with CFRP composites under eccentric loading", *Journal of Composites for Construction*, vol. 14, no. 4, pp. 443–450, 2010.

[6]. W. Punurai, C.-T. T. Hsu, S. Punurai, and J. Chen, "Biaxially loaded RC slender columns strengthened by CFRP composite fabrics", *Engineering Structures*, vol. 46, pp. 311–321, 2013.

[7]. A. Rahai and H. Akbarpour, "Experimental investigation on rectangular RC columns strengthened with CFRP composites under axial load and biaxial bending", *Composite Structures*, vol. 108, pp. 538-546, 2014.

[8]. B. M. Talib and H. A. Mehdi, "Parametric study of square reinforced concrete columns confined by carbon fiber reinforced polymer under uniaxial load", *Journal of Engineering and Sustainable Development*, vol. 25, Special Issue, pp. 4-13–4-21, 2021.

[9]. P. Chotickai, P. Tongya, and S. Jantharaksa, "Performance of corroded rectangular RC columns strengthened with CFRP composite under eccentric loading", *Construction and Building Materials*, vol. 268, Art. no. 121134, 2021.

[10]. J. M. de Araújo, "Comparative study of the simplified methods of Eurocode 2 for second order analysis of slender reinforced concrete columns", *Journal of Building Engineering*, vol. 14, pp. 55–60, 2017.

[11]. M. Bouchaboub and M. L. Samai, "Nonlinear analysis of slender high-strength R/C columns under combined biaxial bending and axial compression", *Engineering Structures*, vol. 48, pp. 37–42, 2013.

[12]. J. L. Bonet, M. L. Romero, and P. F. Miguel, "Effective flexural stiffness of slender reinforced concrete columns under axial forces and biaxial bending", *Engineering Structures*, vol. 33, no. 3, pp. 881–893, 2011.

[13]. L. Lam and J. G. Teng, "Design-oriented stress–strain model for FRP-confined concrete", *Construction and Building Materials*, vol. 17, pp. 471–489, 2003.

[14]. L. Lam and J. G. Teng, "Design-oriented stress–strain model for FRP-confined concrete in rectangular columns", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 22, no. 13, pp. 1149–1186, 2003.

[15]. MathWorks, MATLAB® R2023a. Natick, MA, USA: The MathWorks, Inc., 2023.