

Ứng xử của dầm Timoshenko ba nhịp trên nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba

Đoàn Kiều Văn Tâm^{1*}

¹Khoa Kỹ thuật và Công nghệ, Trường Đại học Quy Nhơn

TỪ KHOÁ

Dầm Timoshenko ba nhịp
Nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba
Tích phân số

TÓM TẮT

Ứng xử động lực học của dầm Timoshenko ba nhịp trên nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba được phân tích trong bài báo. Mô hình nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba theo chuyển vị với sáu thông số nền độc lập được xem xét. Tải trọng là một lực tập trung di động với vận tốc nhanh dần đều. Hệ phương trình chuyển động chủ đạo được thiết lập và được giải bằng phương pháp tích phân từng bước trên toàn miền thời gian Newmark. Trên cơ sở, nghiệm của phương trình là chuyển vị của dầm được xác định, kết quả số được khảo sát cho thấy ảnh hưởng của các thông số nền, dầm, tải trọng đến phản ứng động của dầm.

KEYWORDS

A three-span Timoshenko beam
A cubic nonlinear viscoelastic foundation
Numerical integration

ABSTRACT

The dynamic response of a three-span Timoshenko beam resting on a cubic nonlinear viscoelastic foundation is investigated in this paper. A displacement-dependent cubic nonlinear viscoelastic foundation model with six independent foundation parameters is considered. The concentrated moving load is considered with various cases: Velocity of load assumed to be constant; Moving load as a uniform increasing or decreasing motion. The governing equations of motion are established and solved using the Newmark direct time integration method over the entire time domain. Based on the obtained solution of the governing equation, deflection of beam is determined. Numerical investigations are then conducted to evaluate the effects of the foundation, beam, and loading parameters on the dynamic response of the beam.

1. Giới thiệu

Ứng xử động lực học của dầm trên các loại nền khác nhau chịu tải trọng di động giúp mô tả và dự đoán ứng xử cho nhiều kết cấu trong thực tế như kết cấu cầu, đường sắt, mặt đường sân bay, ống dẫn chất lỏng theo phương ngang... Để phân tích bài toán, mô hình kết cấu được sử dụng là dầm theo lý thuyết Timoshenko hoặc Euler-Bernoulli trên nền đàn hồi chịu tải trọng di động. Phụ thuộc vào tính chất cơ học của đất nền, sự tương tác trong thực tế giữa kết cấu và đất nền mà mô hình đất nền được lựa chọn. Năm 1867, E. Winkler đưa ra mô hình nền đàn hồi tuyến tính Winkler, xem đất nền là một tập hợp đồng nhất của những vùng không gian gần nhau nhưng tồn tại độc lập tuyến tính với nhau, mỗi vùng là một lò xo đàn hồi có độ cứng k . Tuy còn khá đơn giản nhưng mô hình này đã tạo cơ sở tiền đề cho các bài toán nghiên cứu ứng xử của dầm trên nền ra đời. Nổi bật như nghiên cứu của tác giả D.Thambiratnam, Y.Zhuge¹, giới hạn của mô hình Winkler là không phản ánh được sự liên tục liên kết giữa các vùng đất nền lân cận, nên chỉ áp dụng đối với môi trường đất rời; Nhược điểm này được khắc phục bởi một số mô hình nền đàn hồi tuyến tính hai thông số, nổi bật như mô hình nền Filonenko-Borodich, mô hình nền Hetenyi, mô hình nền Pasternak^{2,3}.

Cùng với sự phát triển mạnh mẽ của các công cụ hỗ trợ tính toán, mô hình nền với nhiều thông số độc lập mô tả ứng xử phi tuyến của nền trong quá trình tương tác với dầm, cho kết quả phân tích động lực học thu được nghiệm gần đúng hơn so với thực tế. Trong nghiên cứu

của T.Dahlberg⁴, đã khẳng định điều này qua xem xét biến dạng của đường ray với lần lượt mô hình nền tuyến tính, mô hình nền phi tuyến và kết quả thí nghiệm trong thực tế. Nổi bật là các nghiên cứu của tác giả Younesian⁵, D.Younesian⁶, Ding^{7,8} sử dụng mô hình nền phi tuyến ba thông số xét đến tính cản nhớt của đất nền và phi tuyến bậc ba theo chuyển vị khi khảo sát. Bài báo này Phân tích ứng xử của dầm Timoshenko ba nhịp trên nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba chịu tải trọng di động, mô hình nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba với sáu thông số độc lập. Mô hình này phản ánh được mức độ phức tạp trong quá trình ứng xử thực tế của đất nền tương tác với dầm có xét đến ảnh hưởng của lực cắt khi biến dạng như mô hình dầm Timoshenko, khi chịu tải trọng di động với vận tốc thay đổi.

2. Phương trình chuyển động

2.1. Mô hình kết cấu

Hình 1 thể hiện mô hình kết cấu của hệ gồm dầm ba nhịp, nền, tải trọng. Trong đó, dầm ba nhịp được mô tả theo lý thuyết dầm Timoshenko có kể đến lực cắt khi xét biến dạng, tiết diện mặt cắt ngang không đổi $A(m^2)$, moment quán tính $I(m^4)$, chiều dài $L(m)$, đồng nhất với khối lượng riêng $\rho(kg/m^3)$, modul đàn hồi $E(GPa)$, modul cắt $G(GPa)$ và vùng cắt hữu hiệu $k'A$. Mô hình nền được mô tả như mô hình nền phi tuyến Pasternak với độ cứng là hàm tuyến tính, phi tuyến bậc ba theo chuyển vị và kể đến tính cản nhớt, được cho bởi biểu thức sau:

*Liên hệ tác giả: doankieuvantam@qnu.edu.vn

Nhận ngày 06/05/2026, sửa xong ngày 28/05/2026, chấp nhận đăng ngày 10/06/2026

Link DOI: <https://doi.org/10.54772/jomc.04.2026.1416>

$$P_f(X, T) = k_1 U(X, T) + k_3 U^3(X, T) + \mu \frac{\partial U(X, T)}{\partial T} - G_p \frac{\partial^2 U(X, T)}{\partial X^2}$$

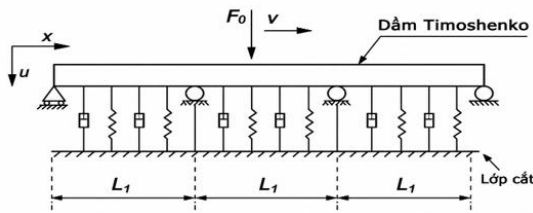
$$M_f(X, T) = k_f \psi(X, T) + c_f \frac{\partial \psi(X, T)}{\partial T} \quad (1)$$

trong đó: $P_f(N/m)$, $M_f(N)$ lực sinh ra mô men bởi đất nền trên một đơn vị chiều dài dầm, $k_1(N/m^2)$ thông số nền tuyến tính, $k_3(N/m^4)$ thông số nền phi tuyến, $G_p(N)$, $\mu(Ns/m^2)$ lần lượt là thông số cắt, hệ số cản của nền, $T(s)$ là đại lượng thời gian, $X(m)$ là tọa độ dọc theo trục dầm, $U(X, T)$ là hàm chuyển vị theo phương đứng, $\psi(X, T)$ là hàm chuyển vị xoay, thông số độ cứng $k_f(N)$ và thông số cản $c_f(Ns)$ của nền.

Trong mô hình kết cấu, tải trọng di động là lực tập trung có vận tốc thay đổi nhanh dần theo thời gian được mô tả như sau:

$$f(X, T) = F_0 \delta[X - (VT + 0.5A_{gt}T^2)] \quad (2)$$

trong đó: $\delta(X - VT)$ là hàm Dirac-Delta, $V(m/s)$ là vận tốc lực di động, $A_{gt}(m/s^2)$ là gia tốc lực di động, $F_0(N)$ là biên độ của lực di động.



Hình 1. Mô hình dầm Timoshenko trên nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba chịu tải trọng di động.

2.2. Thiết lập phương trình chuyển động

Hệ phương trình vi phân chuyển động chủ đạo của dầm được thiết lập căn cứ trên lý thuyết dầm Timoshenko và điều kiện cân bằng lực:

$$\rho A \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + k' AG \left[\frac{\partial \psi}{\partial X} - \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right] + k_1 U + k_3 U^3 + \mu \frac{\partial U}{\partial T} - G_p \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = F_0 \delta[X - (VT + 0.5A_{gt}T^2)]$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + k' AG \left[\psi - \frac{\partial U}{\partial X} \right] + k_f \psi + c_f \frac{\partial \psi}{\partial T} = 0 \quad (3)$$

Sử dụng các thông số và các biến không thứ nguyên như sau:

$$u = \frac{U}{L}; \quad t_i = \frac{T_i}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad x = \frac{X}{L};$$

$$\psi = \psi; \quad v = V \sqrt{\frac{\rho}{E}}; \quad a = A_{gt} L \frac{\rho}{E};$$

$$\alpha = \frac{k' G}{E}; \quad \beta = k' AG \frac{L^2}{EI}; \quad k_1 \leftrightarrow \frac{k_1 L^2}{EA}; \quad (4)$$

$$k_3 \leftrightarrow \frac{k_3 L^4}{EA}; \quad \mu \leftrightarrow \frac{\mu}{A} \sqrt{\frac{L^2}{\rho E}}; \quad G_p \leftrightarrow G_p \frac{1}{EA};$$

$$F_{0i} \leftrightarrow \frac{F_{0i}}{EA}; \quad k_f \leftrightarrow \frac{k_f L^2}{EA}; \quad c_f \leftrightarrow \frac{c_f}{L} \sqrt{\frac{L^2}{\rho E}}$$

với x là tọa độ không gian không thứ nguyên, t_i là đại lượng thời gian không thứ nguyên. Do đó (3) được chuyển về dạng biểu thức không thứ nguyên của phương trình chuyển động chủ đạo như sau:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + k_1 u + k_3 u^3 + \mu \frac{\partial u}{\partial t} - G_p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F_{0i} \delta[x - (vt + 0.5A_{gt}t^2)]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta \left[\psi - \frac{\partial u}{\partial x} \right] + k_f \psi + c_f \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Hệ phương trình (5) là hệ phương trình vi phân chuyển động của dầm trên nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba, đây là phương trình đạo hàm riêng với ẩn số là chuyển vị của dầm.

2.3. Giải hệ phương trình

Phân tích hàm chuyển vị $u(x, t)$, hàm góc xoay $\psi(x, t)$ thành tổng các tích hai hàm riêng biệt lần lượt theo biến không gian x và biến thời gian t

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \phi_k(x), \quad \phi_k(x) = \sin(k\pi x) \quad (6)$$

$$\psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) v_k(x), \quad v_k(x) = \cos(k\pi x)$$

trong đó: $\phi_k(x)$, $v_k(x)$ là hàm thử; $q_k(t)$, $\xi_k(t)$ là tập hợp tọa độ suy rộng của dầm. Thay (6) vào (5) được biểu thức:

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \ddot{q}_k(t) + \mu \dot{q}_k(t) + [k_1 + G_p(k\pi)^2 + \alpha(k\pi)^2] q_k(t) \right\} \phi_k(x) - \alpha \left[\sum_{k=1}^n (k\pi) \xi_k(t) \phi_k(x) \right] + k_3 \left(\sum_{k=1}^n q_k(t) \phi_k(x) \right)^3 = \sum_{i=1}^2 F_{0i} \delta(x - vt_i)$$

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \ddot{\xi}_k(t) + c_f \dot{\xi}_k(t) + [k_f + (k\pi)^2 + \beta] \xi_k(t) \right\} v_k(x) - \beta \left[\sum_{k=1}^n (k\pi) q_k(t) v_k(x) \right] = 0 \quad (7)$$

Ứng dụng phương pháp Galerkin, hàm trọng số $w_i(x)$ được lấy bằng hàm thử $\phi_k(x)$, $v_k(x)$, tiến hành tích phân trên miền $[0, 1]$

$$\int_0^1 \phi_k(x) w_i(x) dx = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1/2 & k = i \end{cases}$$

$$\int_0^1 \psi_k(x) w_i(x) dx = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1/2 & k = i \end{cases} \quad (8)$$

Thay biểu thức (8) vào hệ phương trình (7) đồng thời áp dụng phép cầu phương tích phân để biến đổi tích phân, được hệ phương trình sau:

$$\ddot{q}_i(t) + \mu \dot{q}_i(t) + [k_1 + G_p(k\pi)^2 + \alpha(k\pi)^2] q_i(t) + 2k_3 \sum_{j=1}^N I_j F_j w_i(x_j) - \alpha(i\pi) \xi_i(t) = F_{0i} \delta[x - (vt + 0.5A_{gt}t^2)]$$

$$\ddot{\xi}_i(t) + c_f \dot{\xi}_i(t) + [k_f + (k\pi)^2 + \beta] \xi_i(t) - \beta(i\pi) q_i(t) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

Vậy hệ phương trình vi phân chủ đạo không thứ nguyên ban đầu (5) đã được biến đổi thành hệ phương trình vi phân thường (9) có dạng phi tuyến bậc ba theo tọa độ suy rộng chỉ phụ thuộc vào biến thời gian t . Phương trình này hoàn toàn giải được bằng phương pháp Newmark.

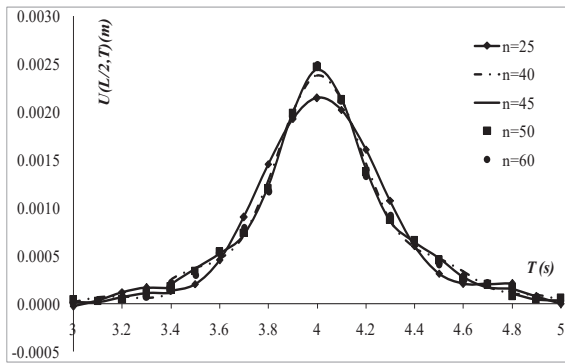
3. Kết quả số

Khảo sát sự hội tụ số hạng Galerkin n và tác động của từng thông số đến chuyển vị của dầm được trình bày ở mục này. Trong đó, các đại lượng vật lý và hình học của dầm Timoshenko, nền, tải trọng được liệt kê trong Bảng 1⁵.

Bảng 1. Các thông số nền, dầm, tải trọng.

	Danh mục đại lượng	Giá trị	Giá trị không thứ nguyên
Dầm	Modul đàn hồi E (GPa)	6.998	-
	Modul biến dạng cắt G (GPa)	77	-
	Khối lượng riêng ρ (kg/m ³)	2373	-

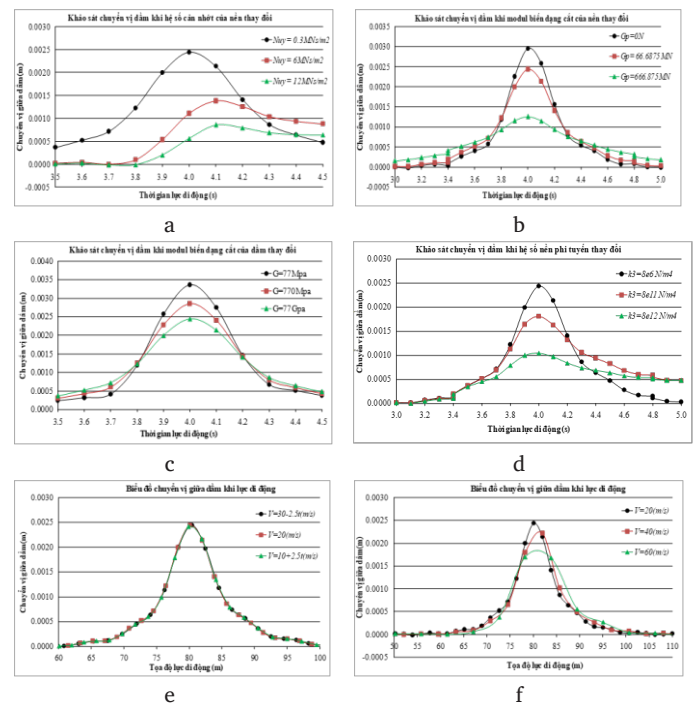
	Danh mục đại lượng	Giá trị	Giá trị không thứ nguyên
	Chiều cao tiết diện h (m)	0.3	-
	Bề rộng tiết diện b (m)	1	-
	Chiều dài L (m)	160	-
	Hệ số cắt k'	0.4	-
	α	-	4.401
	β	-	1.502×10^7
Nền	Hệ số nền tuyến tính k_1 (MPa)	8	97.552
	Hệ số nền phi tuyến k_3 (MN/m ⁴)	8	2.497×10^6
	Hệ số cản μ (MNs/m ²)	0.3	39.263
	Modul biến dạng cắt G_p (N)	6.669×10^7	0.0318
	Hệ số k_f (N)	10^8	1.626×10^5
	Hệ số c_f (Ns)	1.5×10^6	2.618×10^4
Tải trọng di động	Độ lớn F_0 (N)	2.126×10^5	1.01×10^{-4}
	Vận tốc V (m/s)	20	0.01165



Hình 2. Chuyển vị giữa dầm khi lực di động với n thay đổi.

Hình 2 thể hiện đồ thị chuyển vị giữa dầm khi lực di động ứng với từng trường hợp n . Nhận thấy, đồ thị có tính chất đối xứng qua trục đứng tại điểm $T = 4s$; Chuyển vị giữa dầm tăng khi $T < 4s$ và đạt giá trị lớn nhất tại $T = 4s$, sau đó giảm về 0 khi $T > 4s$. Khi giá trị n còn nhỏ, có sự khác lớn khi so sánh các chuyển vị giữa dầm ứng trên từng đồ thị, sự sai khác này giảm dần khi tăng dần giá trị n . So sánh trường hợp $n = 40$ và $n = 45$ có thể thấy sự riêng biệt giữa hai đường đồ thị, tuy nhiên với ba đường đồ thị $n = 45$, $n = 50$, $n = 60$ gần như trùng nhau. Đồng thời, khi tăng số hạng Galerkin giá trị chuyển vị lớn nhất tại giữa dầm tăng, độ sai lệch giá trị này với từng trường hợp giảm dần khi n tăng và giá trị độ sai lệch giữa hai trường hợp $n = 45$ và $n = 50$ bằng 1,25 % là nhỏ. Từ đó kết luận rằng với giá trị số hạng Galerkin $n = 45$ bài toán ứng xử động của dầm đạt sự hội tụ.

Bằng cách thay đổi lần lượt giá trị từng thông số trong Bảng 1 và giữ nguyên giá trị các thông số còn lại, sau đó tìm chuyển vị dầm ứng với trường hợp $n = 45$. Từ đó, tiến hành khảo sát tác động của các thông số đến lịch sử chuyển vị giữa dầm khi tải trọng di động. Kết quả khảo sát được thể hiện ở đồ thị Hình 3a đến Hình 3f theo thứ tự lần lượt: hệ số cản nhớt của nền μ , modul biến dạng cắt của nền G_p , modul biến dạng cắt của dầm G , hệ số nền phi tuyến k_3 , giá trị vận tốc tải trọng V . Từ đồ thị Hình 3, nhận thấy giá trị lớn nhất của chuyển vị giữa dầm khi lực di động tại giữa dầm (có thể sai số $\pm 0.1\%$), riêng với trường hợp thông số μ thì xuất hiện muộn hơn khi tăng giá trị μ (Hình 3a). Như vậy khi tăng giá trị μ thì giá trị lớn nhất của chuyển vị giữa dầm giảm và xuất hiện muộn hơn. Do đó thông số μ có ý nghĩa quan trọng, không thể bỏ qua khi phân tích ứng xử của dầm Timoshenko trên nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba chịu tải trọng di động. Hình 3b cho thấy khi bỏ qua tính cắt của nền $G_p = 0$ thì giá trị lớn nhất của chuyển vị dầm là lớn nhất đồng nghĩa với giá trị lớn nhất của chuyển vị dầm trên mô hình nền Pasternak nhỏ hơn nhiều so với dầm trên mô hình nền đàn hồi Winkler. Đồng thời khi càng giảm giá trị modul biến dạng cắt của dầm G nghĩa là loại bỏ dần sự ảnh hưởng của tính cắt đến ứng xử dầm hay nói cách khác mô hình dầm Timoshenko dần trở thành mô hình dầm Euler – Bernoulli thì giá trị lớn nhất của chuyển vị dầm tăng như Hình 3c. Tương tự khi tăng giá trị hệ số nền phi tuyến k_3 thì giá trị lớn nhất của chuyển vị dầm giảm thể hiện trên đồ thị Hình 3d. Đồ thị Hình 3e, Hình 3f thể hiện ảnh hưởng của thông số vận tốc tải di động V đến chuyển vị dầm. Qua đó rút ra kết luận chuyển vị giữa dầm gần như không thay đổi khi tải trọng di động nhanh dần đều hoặc chậm dần đều. Tuy nhiên khi tăng độ lớn giá trị vận tốc tải di động thì chuyển vị lớn nhất của dầm giảm.



Hình 3. Khảo sát ảnh hưởng các thông số đến chuyển vị dầm.

4. Kết luận

Từ các kết quả của bài báo này, một số kết luận được sơ lược như sau:

- Mô hình của hệ gồm có dầm Timoshenko ba nhịp, tải trọng tập trung di động và nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba được thiết lập. Phương pháp tích phân số theo thời gian Newmark được áp dụng để giải hệ phương trình này và từ đó nghiệm của bài toán là chuyển vị đứng của dầm được xác định.

- Kết quả số chỉ ra rằng: hệ số cản nhớt của nền μ có ý nghĩa quan trọng, không thể bỏ qua trong bài toán phân tích ứng xử dầm; Giá trị lớn nhất của chuyển vị dầm trên mô hình nền Pasternak nhỏ hơn nhiều so với dầm trên mô hình nền đàn hồi Winkler; Điều này tương tự khi sử dụng lý thuyết dầm Euler – Bernoulli thay cho dầm Timoshenko; Giá trị chuyển vị giữa dầm chỉ phụ thuộc đến lớn tải trọng, không phụ thuộc tốc độ di chuyển nhanh dần hay chậm dần của tải trọng.

Tài liệu tham khảo

- [1]. Thambiratnam D., Zhuge Y., Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subjected to moving loads, Journal of Sound and Vibration, 1996, 198,149-169.
- [2]. Kargarnovin M.H., Younesian D., Dynamics of Timoshenko beams on Pasternak foundations under moving loads, Mechanical Research Communications, 2004, 31, 713-723.
- [3]. Younesian D., Kargarnovin M.H., Response of the beams on random Pasternak foundations subjected to harmonic moving loads, Journal of Mechanical Science and Technology, 2009, 23, 3013-3023.
- [4]. Dahlberg T., Dynamic interaction between train and nonlinear railway track model, in Proceedings of the Fifth European Conference on Structural Dynamics (EURODYN 2002), Germany 2002, 2, 1155-1160.
- [5]. Yang Y., Ding H., Chen L.Q., Dynamics response to a moving load of a Timoshenko beam resting on a nonlinear viscoelastic foundations, Acta Mechanica Sinica, 2013, 29(5), 718 - 727.
- [6]. D.Younesian, M.H.Kargarnovin, Response of the beams on random Pasternak foundations subjected to harmonic moving loads, Journal of Mechanical Science and Technology, 2009, 23, 3013-3023.
- [7]. Hu Ding, Li-Qun Chen, Shao-Pu Yang, Convergence of Galerkin truncation for dynamic response of finite beams on nonlinear foundations under a moving load, Journal of Sound and Vibration, 2012, 331, 2426-2442.
- [8]. Ding H., Shi K.L., Chen L.Q., Yang S.P., Dynamics response of an infinite Timoshenko beam on a nonlinear viscoelastic foundations to a moving load, Nonlineararm Dynamics, 73 (2013), 285-298.