VẬT LIỆU & XÂY DỰNG
Tạp chí Vật liệu và Xây dựng
ISSN 1859 - 381X
Website: www. jomc.vn

Mô phỏng số ứng xử của dầm bê tông cốt thép chịu xoắn-cắt đồng thời được gia cường bằng tấm CFRP

Hồ Thị Hoài [1*]

[1] Khoa Kỹ Thuật Xây Dựng, Trường Đại học Giao thông Vận tải

TỪ KHOÁ
Dầm bê tông cốt thép
Xoắn-cắt kết hợp
Mô phỏng số
CFRP
ATENA

TÓM TẮT

Bài báo trình bày việc xây dựng mô hình phần tử hữu hạn (PTHH) mô phỏng dầm bê tông cốt thép (BTCT) chịu xoắn–cắt kết hợp được gia cường bằng tấm CFRP sử dụng phần mềm ATENA. Mô hình xem xét sự làm việc của bê tông, cốt thép, lớp CFRP và lớp keo epoxy liên kết, đồng thời được kiểm chứng thông qua so sánh với kết quả thực nghiệm về quan hệ tải trọng–chuyển vị, sự phát triển vết nứt, dạng phá hoại và tải trọng phá hoại. Kết quả cho thấy mô hình có khả năng mô phỏng chính xác ứng xử của dầm và phản ánh đúng xu hướng làm việc của cấu kiện được gia cường. Mô hình được đề xuất là cơ sở cho các nghiên cứu mô phỏng và phân tích chuyên sâu đối với dầm bê tông cốt thép chịu xoắn–cắt kết hợp sử dụng vật liệu FRP.

KEYWORDS
Reinforced concrete beam
Torsion-shear combination
Numerical simulation
CFRP
ATENA

ABSTRACT

This paper presents a finite element (FE) model for simulating the behavior of reinforced concrete (RC) beams strengthened with externally bonded carbon fiber-reinforced polymer (CFRP) sheets under combined torsion and shear using the ATENA software. The model considers the mechanical behavior of concrete, steel reinforcement, CFRP sheets, and the epoxy adhesive layer, and is validated against experimental results in terms of load–displacement response, crack propagation, failure mode, and ultimate load. The results demonstrate that the proposed model accurately predicts the structural behavior of the strengthened beams and reliably captures their overall response under combined torsion and shear. The validated FE model provides a useful numerical tool for further parametric investigations and advanced analyses of FRP-strengthened RC beams subjected to combined torsion and shear.

1. Đặt vấn đề

Trong các công trình bê tông cốt thép (BTCT), các cấu kiện như dầm biên, dầm cong và dầm đỡ sàn lệch tâm thường chịu trạng thái ứng suất phức tạp, trong đó lực cắt và mô-men xoắn cùng tác dụng đồng thời thay vì xuất hiện riêng biệt. Khác với phá hoại do uốn hoặc cắt thuần túy, phá hoại do xoắn ở dầm BTCT thường xảy ra đột ngột và khó dự báo, tiềm ẩn nguy cơ mất an toàn cho kết cấu. Bên cạnh đó, nhu cầu sửa chữa và gia cường các công trình BTCT hiện hữu là cấp thiết do ảnh hưởng của ăn mòn cốt thép và sự gia tăng của tải trọng sử dụng. Trong bối cảnh đó, việc nghiên cứu ứng xử và đề xuất giải pháp gia cường cho dầm BTCT chịu xoắn–cắt kết hợp có ý nghĩa khoa học và thực tiễn quan trọng.

Khả năng chịu xoắn thuần túy cũng như xoắn kết hợp của dầm BTCT đã được nhiều tác giả nghiên cứu thông qua các mô hình lý thuyết khác nhau. Trong đó, lý thuyết uốn vênh (Skew Bending Theory)[1, 2] và mô hình giàn không gian (Space Truss Analogy) [3] được xem là cơ sở nền tảng cho phân tích xoắn. Bên cạnh đó, lý thuyết trường nén (Compression Field Theory) [4] và lý thuyết trường nén sửa đổi (Modified Compression Field Theory) [5, 6] đã mở rộng khả năng mô tả ứng xử của dầm BTCT có vết nứt. Các kết quả nghiên cứu này đã được áp dụng trong các tiêu chuẩn hiện hành như ACI 318-19 [7] và AASHTO LRFD [8], tạo cơ sở cho việc tính toán và đánh giá khả năng chịu xoắn của kết cấu BTCT.

Trên cơ sở các lý thuyết và phương pháp tính toán nêu trên, nhiều nghiên cứu đã tập trung phát triển các giải pháp gia cường nhằm nâng cao khả năng chịu xoắn của dầm BTCT. Trong đó, vật liệu polyme cốt sợi (Fiber Reinforced Polymer – FRP) với cường độ chịu kéo cao, trọng lượng nhẹ và khả năng chống ăn mòn tốt được xem là giải pháp gia cường ngoài hiệu quả cho dầm BTCT chịu xoắn. Trong đó, nhiều nghiên cứu đã tập trung vào ảnh hưởng của tấm FRP đối với khả năng chịu cắt và xoắn của các cấu kiện bê tông. Ameli và các cộng sự [9] đã chứng minh tấm FRP làm tăng đáng kể mô men xoắn cực hạn và cải thiện độ dẻo của dầm BTCT khi được bọc toàn phần; kết quả tương tự cũng được Nguyễn Trung Hiếu và Lê Trung Cường [10] khẳng định khi gia cường dầm BTCT bằng tấm CFRP. Các nghiên cứu tiếp theo trên dải CFRP dạng U cho dầm hộp [11], dải CFRP cho dầm tiết diện có cánh [12] đều khẳng định hiệu quả gia cường, đồng thời chỉ ra giải pháp bọc toàn phần hoặc bố trí nghiêng 45 ° cho hiệu quả cao hơn so với dải rời. Deifalla và Ghobarah cùng Talaeitaba và Mostofinejad [12] đã xây dựng các đường cong tương tác cắt–xoắn và chỉ ra rằng dự báo theo tiêu chuẩn fib chỉ đạt khoảng 30 % so với kết quả thực nghiệm. Nguyen và

*Liên hệ tác giả: hoaiho@utc.edu.vn
Nhận ngày 29/06/2026, sửa xong ngày 25/07/2026, chấp nhận đăng ngày 27/07/2026
Link DOI: https://doi.org/10.54772/jomc.06.2026.1440

các cộng sự [13] cho thấy việc kết hợp đồng thời CFRP và BFRP cho khả năng chịu xoắn cao hơn so với chỉ sử dụng một loại FRP, trong khi Nguyễn Vĩnh Sáng và các cộng sự [14] đã đề xuất mô hình thanh chống giằng nhằm dự đoán khả năng chịu xoắn của dầm BTCT được gia cường bằng tấm FRP bọc ngoài. Song song với các nghiên cứu thực nghiệm, tiêu chuẩn fib Bulletin 90 [15] đã đưa ra công thức tính phần đóng góp của FRP vào khả năng chịu xoắn, trong khi ACI 440.2R-17 [16] vẫn chưa có quy định cụ thể cho gia cường xoắn do dữ liệu thực nghiệm còn hạn chế.

Nhìn chung, các nghiên cứu hiện nay chủ yếu tập trung vào đánh giá khả năng chịu xoắn của dầm BTCT thông qua thực nghiệm hoặc xây dựng mô hình tính toán, trong khi các nghiên cứu mô phỏng số về ứng xử của dầm BTCT chịu xoắn–cắt kết hợp được gia cường bằng tấm CFRP vẫn còn tương đối hạn chế. Do đó, việc phát triển mô hình phần tử hữu hạn có khả năng mô tả chính xác cơ chế làm việc, quá trình hình thành và phát triển vết nứt, cũng như đánh giá hiệu quả gia cường của tấm CFRP là cần thiết.

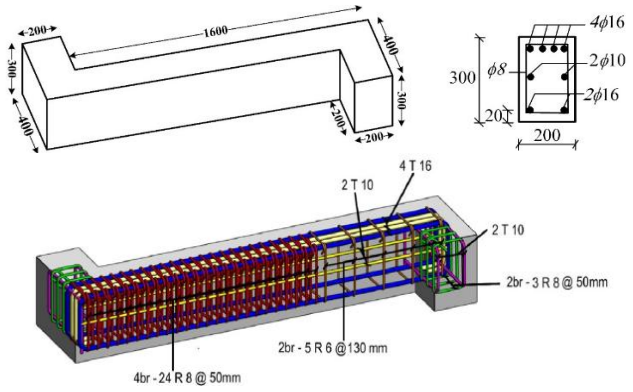
Trong nghiên cứu này, mô hình phần tử hữu hạn được xây dựng nhằm mô phỏng ứng xử của dầm BTCT chịu xoắn–cắt kết hợp được gia cường bằng tấm CFRP bọc ngoài. Kết quả mô phỏng về khả năng chịu lực, dạng phá hoại và sự phát triển vết nứt được so sánh với kết quả thực nghiệm để đánh giá độ tin cậy của mô hình, đồng thời làm rõ cơ chế làm việc và hiệu quả gia cường của tấm CFRP đối với dầm BTCT chịu xoắn–cắt kết hợp.

2. Xây dựng mô hình mô phỏng

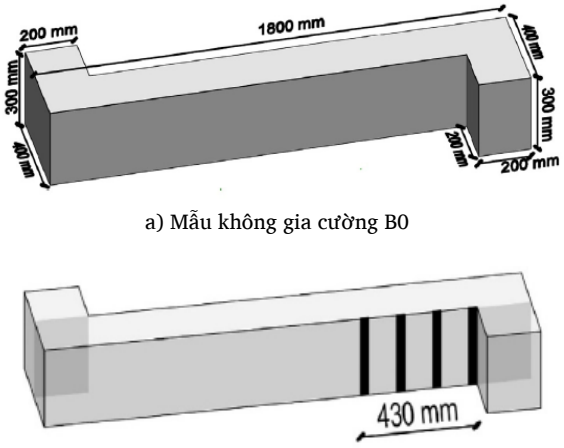
2.1. Mẫu dầm thí nghiệm

Trong nghiên cứu này, các mẫu dầm bê tông cốt thép (BTCT) chịu xoắn–cắt kết hợp được gia cường bằng tấm CFRP trong nghiên cứu của Elbakry và cộng sự [17] được lựa chọn để xây dựng và kiểm chứng mô hình mô phỏng. Dầm có tổng chiều dài 1800 mm và kích thước mặt cắt là 200 × 300 mm, với hai đầu công-xôn có dạng hai cánh tay đòn để đặt tải lệch tâm, tạo ra đồng thời lực cắt và mô-men xoắn. Khoảng cách từ hai đầu hẫng đến điểm đặt hai gối dầm là 630 mm.

Cốt thép dầm bao gồm bốn thanh Φ16 cốt dọc tại thớ trên, hai thanh Φ16 cốt dọc tại thớ dưới và hai thanh Φ10 tại giữa tiết diện. Cốt thép đai của dầm gồm các đai bốn nhánh Φ8 với khoảng cách 50 mm, kéo dài từ đầu dầm đến khoảng cách 1170 mm đầu tiên. Trong khi đó, vùng còn lại được bố trí đai hai nhánh Φ6 với khoảng cách 130 mm nhằm đảm bảo phá hoại tập trung tại vùng hẫng của dầm là 430 mm. Sơ đồ kích thước và bố trí cốt thép trong dầm được thể hiện trong Hình 1. Các mẫu thí nghiệm được sử dụng để mô phỏng bao gồm một dầm đối chứng không gia cường (B0) và một dầm được gia cường một mặt bằng dải CFRP (BWS1) với chiều rộng dải bọc 30 mm (Hình 2). Các mẫu dầm thí nghiệm được chế tạo bằng bê tông có cường độ chịu nén trung bình ở 28 ngày tuổi xác định trên mẫu lập phương bằng 40 MPa. Giới hạn chảy của cốt thép đường kính 16, 10, 8 và 6 mm lần lượt là 497 MPa, 480 MPa, 330 MPa và 310 MPa. Trong khi đó, tấm CFRP gia cường là loại Fiber 230C kết hợp với epoxy liên kết với các đặc trưng cơ học chi tiết được thể hiện trong Bảng 1.



Hình 1. Kích thước và bố trí cốt thép của các mẫu dầm BTCT trong thí nghiệm (đơn vị mm) [17].



a) Mẫu không gia cường B0

b) Mẫu gia cường BWS1

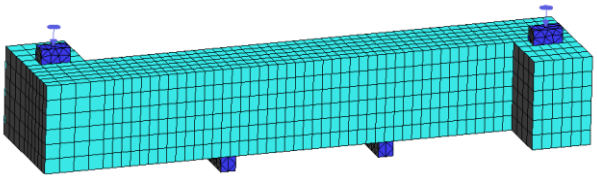
Hình 2. Các mẫu dầm BTCT đối chứng trong mô hình phần tử hữu hạn [17].

Bảng 1. Đặc trưng cơ học của tấm CFRP và lớp epoxy [17].

Vật liệu	Chiều dày (mm)	Mô đun đàn hồi (MPa)	Cường độ chịu kéo (MPa)	Biến dạng cực hạn (%)
Fiber 230C	0,131	238.000	4.300	1,8
Epoxy CFRP	–	21.400	30	4,8

2.2. Mô hình phần tử hữu hạn

Trong nghiên cứu này, mô hình dầm BTCT được xây dựng bằng phần mềm phân tích phi tuyến phần tử hữu hạn ATENA. Bê tông được mô phỏng bằng phần tử khối 3D, trong khi cốt thép được mô hình hóa bằng các phần tử thanh rời rạc. Hệ gia cường ngoài sử dụng tấm CFRP được xem là một tổ hợp gồm lớp vật liệu tấm polymer cốt sợi và lớp keo epoxy liên kết với bề mặt bê tông. Trong mô hình phần tử hữu hạn, lớp gia cường này được lý tưởng hóa dưới dạng phần tử bề mặt hai chiều nhằm mô phỏng khả năng chịu kéo chủ yếu theo phương sợi. Đồng thời, liên kết giữa tấm CFRP và bê tông được mô hình hóa bằng phần tử interface, đại diện cho lớp keo epoxy, cho phép mô phỏng cơ chế truyền lực cũng như sự suy giảm liên kết tại vùng tiếp xúc giữa hai vật liệu. Trong nghiên cứu này, mô hình dầm bê tông cốt thép và lớp CFRP được chia lưới với kích thước phần tử tương ứng là 30 mm và 3 mm. Vì vậy, các nút của hai lưới không trùng nhau và được liên kết thông qua kỹ thuật lưới không tương thích (incompatible mesh). Ngoài ra, các tấm thép đại diện cho tấm gia tải tại vùng cánh hẫng và các gối đỡ trong thí nghiệm cũng được mô hình hóa. Điều kiện biên được thiết lập với gối trái bị ngăn cản chuyển vị theo ba phương (Ux = Uy = Uz = 0), trong khi gối phải bị khống chế chuyển vị theo phương đứng và phương ngang. Cả hai gối đều cho phép quay quanh trục dọc của dầm (trục x). Trong thí nghiệm, tải trọng tập trung được tác dụng vuông góc lên bản thép tại hai đầu hẫng của dầm, ở vị trí cách gối 530 mm và lệch 125 mm so với trục dầm. Trong mô hình mô phỏng, tải trọng được tác dụng thông qua việc khống chế chuyển vị tại trọng tâm của tấm bản thép với số gia chuyển vị 0,0001 m (Hình 3). Quá trình phân tích tĩnh phi tuyến trong mô hình phần tử hữu hạn được giải bằng thuật toán Newton–Raphson. Đồng thời, các điểm đo được bố trí tương ứng với vị trí cảm biến LVDT trong thí nghiệm để theo dõi tải trọng và chuyển vị của dầm.



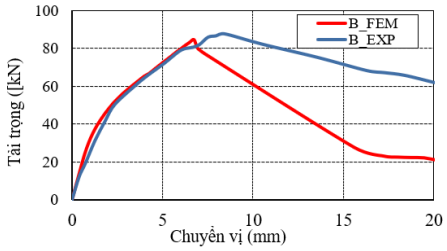
Hình 3. Mô hình phần tử hữu hạn của dầm BTCT chịu xoắn-cắt kết hợp.

Trong nghiên cứu này, bê tông được mô phỏng bằng mô hình vật liệu có sẵn "CC3DnonLinCementitious2" của phần mềm ATENA, Các thông số đầu vào của vật liệu bê tông được lấy từ thí nghiệm và các giá trị mặc định tương ứng. Trong khi đó, cốt thép được mô phỏng bằng mô hình song tuyến tính "3D Bilinear Steel Von Mises", với cường độ chảy được cung cấp ở mục 2.1. Quan hệ dính bám giữa bê tông và cốt thép được giả thiết là tuyệt đối trong dầm mô phỏng. Vật liệu của các tấm thép được giả thiết có ứng xử đàn hồi tuyến tính với mô đun đàn hồi 210 GPa Tấm CFRP được mô hình hóa dưới dạng vật liệu composite gồm lớp keo epoxy và cốt sợi FRP phân bố đều. Ứng xử của vật liệu này được giả thiết là đàn hồi tuyến tính cho đến khi xảy ra phá hoại. Thông số cơ học của các vật liệu này được khai báo theo số liệu đã được cung cấp ở Bảng 1.

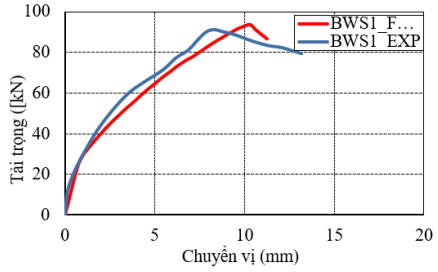
3. Kết quả mô phỏng ứng xử của dầm BTCT chịu xoắn-cắt đồng thời được gia cường bằng tấm CFRP

3.1. Đường cong tải trọng-chuyển vị

Để kiểm chứng mô hình phần tử hữu hạn, đường cong tải trọng–chuyển vị của các dầm mô phỏng được so sánh với kết quả thực nghiệm (Hình 4). Kết quả cho thấy trong giai đoạn đầu chịu tải, quan hệ tải trọng–chuyển vị có dạng gần tuyến tính. Sau khi bê tông bắt đầu nứt, độ cứng của dầm giảm, dẫn đến chuyển vị tăng nhanh hơn khi tải trọng tiếp tục gia tăng cho đến khi phá hoại. Trong cả nghiên cứu mô phỏng và thí nghiệm, so với dầm B0, giá trị tải trọng lớn nhất và chuyển vị trong dầm được gia cường bằng các dải CFRP ở một mặt cho kết quả về tải trọng lớn nhất và giá trị chuyển vị lớn hơn. Có thể thấy rằng, mô hình phần tử hữu hạn cho kết quả tương đồng so với thí nghiệm về quan hệ tải trọng–chuyển vị của dầm trong toàn bộ quá trình chịu tải. Như vậy, mô hình mô phỏng có khả năng dự đoán hợp lý ứng xử của dầm.



a) Dầm B0



b) Dầm BWS1

Hình 4. So sánh đường cong tải trọng– chuyển vị của dầm mô phỏng với kết quả thí nghiệm.

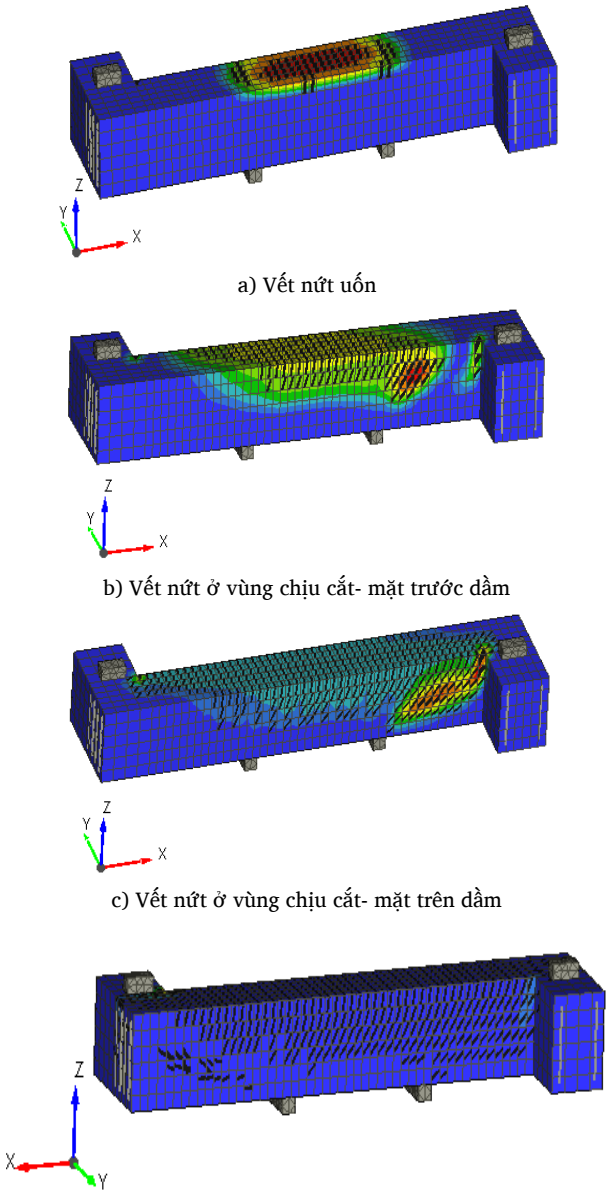
3.2. Sự hình thành và phát triển vết nứt

Sự hình thành và phát triển vết nứt của dầm BTCT trong mô phỏng số được so sánh với kết quả thực nghiệm. Kết quả cho thấy sự tương đồng về vị trí xuất hiện, quá trình phát triển của các vết nứt trong cả hai trường hợp dầm thường và dầm có gia cường một mặt bằng tấm CFRP. Hình 5 thể hiện các giai đoạn hình thành vết nứt trên dầm B0 dưới tác dụng của tải trọng. Ban đầu, các vết nứt uốn xuất hiện

tại mặt trên ở vùng có mô men uốn lớn ở giữa dầm. Khi tải trọng tiếp tục tăng, các vết nứt xiên bắt đầu hình thành trong khu vực cánh hẫng hai đầu dầm. Dưới tác dụng tải trọng tác dụng lệch tâm, mô men xoắn gây ra các vết nứt lan truyền theo chu vi tiết diện và lần lượt xuất hiện trên mặt trước, mặt trên và mặt sau của dầm. Ứng suất cắt sinh ra do tác dụng đồng thời của lực cắt và mô men xoắn là nguyên nhân chính dẫn đến sự hình thành và phát triển các vết nứt xiên, đặc biệt tại vùng khảo sát có mật độ cốt đai thấp. Tại mặt trước của dầm, ứng suất cắt do lực cắt và mô men xoắn có xu hướng cộng hưởng, làm tăng ứng suất cắt tổng hợp, khiến các vết nứt xiên xuất hiện sớm hơn và phá hoại cuối cùng xảy ra tại mặt này. Trong khi đó, mặt trên và mặt sau chịu mức ứng suất cắt thấp hơn nên các vết nứt xuất hiện muộn hơn. Đặc biệt, tại mặt sau và mặt dưới dầm, các vết nứt xuất hiện ít hơn với bề rộng bé so sánh với các mặt còn lại. Khi tải trọng tiếp tục tăng, các vết nứt xiên tại mặt trước dầm tiếp tục lan truyền và mở rộng cho đến khi gây ra phá hoại cắt tại vùng khảo sát.

Bảng 2 trình bày kết quả tải trọng theo từng giai đoạn hình thành vết nứt của dầm trong thí nghiệm và mô hình phần tử hữu hạn. Với dầm mô phỏng B0, vết nứt uốn đầu tiên xuất hiện tại vùng giữa dầm khi tải trọng đạt khoảng 21 kN, trong khi các vết nứt cắt lần lượt hình thành trên mặt trước và mặt sau của dầm tại các mức tải 37,7 kN và 83,1 kN sau đó phá hoại ở mức tải 84,5 kN. Đối với dầm BWS1 được gia cường bằng dải CFRP một mặt, tải trọng tương ứng với thời điểm xuất hiện vết nứt uốn và vết nứt cắt trên mặt trước đều cao hơn so với dầm không gia cường, cho thấy tấm CFRP có tác dụng làm chậm quá trình hình thành các vết nứt ban đầu. Tuy nhiên, vết nứt cắt trên mặt sau của dầm xuất hiện ở mức tải 76 kN, sớm hơn so với dầm B0, cho thấy sự thay đổi trong phân bố ứng suất do ảnh hưởng của giải pháp gia cường. Nhìn chung, sai số giữa mô hình phần tử hữu hạn và kết quả thực nghiệm đối với tải trọng tại các giai đoạn hình thành vết nứt đều nhỏ hơn 9 %. Như vậy, mô hình có khả năng dự đoán chính xác quá trình phát triển vết nứt của dầm BTCT chịu xoắn–cắt kết hợp.

Cơ chế hình thành và lan truyền vết nứt ở dầm có gia cường cũng tương tự như dầm B0, tuy nhiên, nhờ sự tham gia chịu lực của tấm polymer sợi các bon, dầm BWS1 phá hoại ở giá trị tải trọng lớn. Hình 5 so sánh dạng phá hoại giữa mô hình phần tử hữu hạn và kết quả thực nghiệm đối với các dầm khảo sát. Kết quả cho thấy mô hình phần tử hữu hạn có thể dự đoán vị trí xuất hiện, hướng lan truyền của các vết nứt cắt cũng như dạng phá hoại cuối cùng của dầm. Trong cả mô hình mô phỏng và thí nghiệm, vết nứt cắt tại vùng khảo sát phát triển từ mép dầm đến gối tựa với góc nghiêng xấp xỉ 45 °. Cơ chế phá hoại chủ yếu xảy ra do sự phát triển của hệ vét nứt xiên dưới tác dụng kết hợp của lực cắt và mô men xoắn. Sự tương đồng giữa kết quả mô phỏng và thực nghiệm khẳng định độ tin cậy của mô hình phần tử hữu hạn trong việc mô phỏng quá trình phát triển vết nứt và dự đoán dạng phá hoại của dầm BTCT chịu xoắn–cắt kết hợp được gia cường bằng tấm CFRP.



a) Vết nứt uốn

b) Vết nứt ở vùng chịu cắt- mặt trước dầm

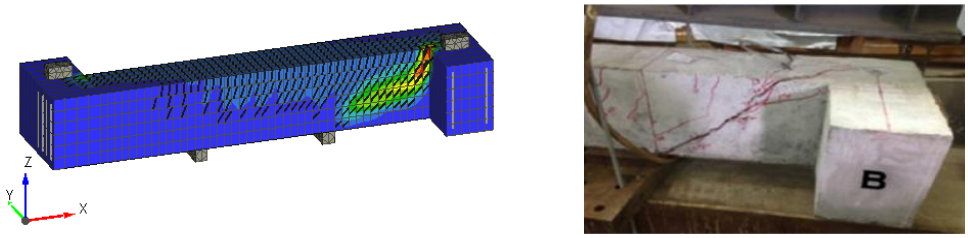
c) Vết nứt ở vùng chịu cắt- mặt trên dầm

d) Vết nứt ở vùng chịu cắt- mặt sau dầm

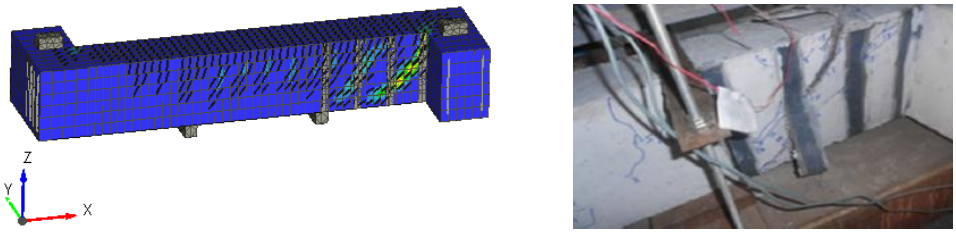
Hình 4. Sự hình thành vết nứt ở dầm không gia cường B0.

Bảng 2. So sánh kết quả tải trọng theo từng giai đoạn hình thành vết nứt của các dầm trong thí nghiệm và mô hình mô phỏng.

Giai đoạn	B0			BWS1		
	P_{EXP} (kN)	P_{FEM} (kN)	Sai số (%)	P_{EXP} (kN)	P_{FEM} (kN)	Sai số (%)
Xuất hiện vết nứt uốn	20	21	5,0	20	21	5,0
Xuất hiện vết nứt cắt- mặt trước	37,5	37,7	0,5	45	42	6,7
Xuất hiện vết nứt cắt -mặt sau	80	83,1	3,8	70	76	8,6



a) Mẫu B0



b) Mẫu BWS1

Hình 5. So sánh dạng phá hoại của các dầm trong mô hình mô phỏng và thí nghiệm.

3.3. Giá trị tải trọng lớn nhất

Bảng 3 so sánh kết quả tải trọng lớn nhất thu được trong mô hình phần tử hữu hạn và thí nghiệm. Giá trị tải trọng lớn nhất thu được ở cả hai dầm B0 và BWS1 đều có sai lệch nhỏ hơn 5 % so với kết quả thực nghiệm. Có thể thấy rằng, mô hình phần tử hữu hạn có khả năng dự đoán tốt khả năng chịu lực của dầm và cho kết quả tương đồng với thí nghiệm.

Bảng 3. So sánh kết quả tải trọng lớn nhất thu được trong dầm BTCT.

Dầm	Tải trọng lớn nhất P_u (kN)		Sai số (%)
	Thí nghiệm	Mô phỏng	
B0	87,5	84,5	3,4
BWS1	90,3	93,7	3,8

4. Kết luận

Nghiên cứu này đã xây dựng mô hình phần tử hữu hạn mô phỏng ứng xử của dầm bê tông cốt thép chịu xoắn–cắt kết hợp được gia cường bằng tấm CFRP. Kết quả mô phỏng cho thấy sự tương đồng với thí nghiệm về quan hệ tải trọng–chuyển vị, dạng phá hoại cũng như tải trọng phá hoại. Quá trình hình thành và phát triển vết nứt trong mô hình cũng phù hợp với kết quả thực nghiệm về vị trí xuất hiện, trình tự phát triển và dạng lan truyền của các vết nứt. Sai số về giá trị tải trọng tại các giai đoạn hình thành vết nứt nhỏ hơn 9 %, trong khi sai số tải trọng phá hoại nhỏ hơn 5 %. Mô hình phần tử hữu hạn được xây dựng có thể được sử dụng để nghiên cứu cơ chế làm việc và đánh giá hiệu quả gia cường của tấm CFRP đối với dầm bê tông cốt thép chịu xoắn–cắt kết hợp, đồng thời là cơ sở cho các nghiên cứu tham số và phát triển các mô hình tính toán phục vụ phân tích, thiết kế gia cường kết cấu bằng vật liệu FRP.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Giao thông Vận tải (ĐH GTVT) trong đề tài có mã số T2026-XD-004.

Tài liệu tham khảo

[1]. N. Lessig, Determination of load carrying capacity of reinforced concrete element with rectangular cross-section subjected to flexure with torsion, Proc. Concrete and Reinforced Concrete Inst, (1959), 5-28.
[2]. T. T. Hsu, Torsion of structural concrete-behavior of reinforced concrete rectangular members, Special Publication, 18(1968), 261-306.
[3]. E. Rausch, Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung (Design of Reinforced Concrete in torsion). Ph.D. Thesis, Technische Hochschule, Berlin, Germany, 1929; p. 53. (In German).
[4]. D. Mitchell, M. P. Collins, Diagonal compression field theory-a rational model for structural concrete in pure torsion, Journal Proceedings, 1974, 396-408.
[5]. F. J. Vecchio, M. P. Collins, The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear, ACI J., 83(1986), 219-231.
[6]. F. J. Vecchio, M. P. Collins, Predicting the response of reinforced concrete beams subjected to shear using modified compression field theory, ACI Structural Journal, 85(1988), 258-268.
[7]. ACI-318-19, Building code requirements for structural concrete and commentary. (2019), American Concrete Institute, Farmington Hills, MI.
[8]. AASHTO, LRFD Bridge Design Specifications. (2024): Washington DC, USA.
[9]. M. Ameli, H. R. Ronagh, P. F. Dux, Behavior of FRP strengthened reinforced concrete beams under torsion, Journal of composites for construction, 11(2007), 192-200.
[10]. N. T. Hiếu, L. T. Cường, Nghiên cứu thực nghiệm hiệu quả gia cường dầm bê tông cốt thép chịu xoắn bằng vật liệu tấm sợi các bon CFRP, Bản B của Tạp chí Khoa học và Công nghệ Việt Nam, 60(2018).
[11]. S. Ma, N. M. Bunnori, K. Choong, Behavior of reinforced concrete box beam strengthened with CFRP U-wrap strips under torsion, MATEC Web of Conferences, 2016, EDP Sciences, 02002.

[12]. A. Deifalla, A. Ghobarah, Simplified analysis for torsionaly strengthened RC beams using FRP, Proceedings of the International Symposium on Bond Behavior of FRP in Structures (BBFS 2005) Chen and Teng (eds), International Institute for FRP in Construction, 2005, 377-8.

[13]. V. S. Nguyen, X. H. Nguyen, D. D. Le, C. T. N. Tran, A. D. Nguyen, Experimental studies on torsional behavior of reinforced concrete beams strengthened using hybrid carbon and basalt FRP sheets, Structural Concrete.

[14]. N. V. Sáng, N. A. Dũng, N. N. Thắng, Mô hình xác định khả năng chịu xoắn dầm bê tông cốt thép được gia cường bằng tấm FRP bọc ngoài, Tạp chí Vật liệu và Xây dựng-Bộ Xây dựng, 15(2025), 21-Trang 29.

[15]. C.-. FIP, Fib-bulletin-90 : Externally applied FRP reinforcement for concrete structures.Lausanne, Switzerland: CEB- FIP., (2010).

[16]. A. C. I. (ACI), 440.2R-17: Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Concrete Structures. (2017).

[17]. H. Elbakry, E.-T. M. El-Tony, M. M. Ali, STRENGTHENING OF RC BEAMS SUBJECTED TO SHEAR AND TORSION USING EXTERNALLY BONDED CFRP SHEETS, Mansoura Engineering Journal, 50(2025), 6.