

# Đánh giá một số phản ứng quan trọng của kết cấu công trình sử dụng cản rayleigh và cản hằng số theo phương pháp lịch sử thời gian

Nguyễn Thanh Trúc<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Khoa Xây dựng, Trường Đại học Xây dựng Miền Tây, 20B Phó Cơ Điều, Phường 3, Tp. Vĩnh Long, Tỉnh Vĩnh Long

**TỪ KHOÁ**

Động đất; ma trận cản  
Dạng dao động  
Gia tốc nền đất  
Lịch sử thời gian

**TÓM TẮT**

Ma trận cản trong bài toán động lực học có ảnh hưởng trực tiếp đến kết quả tính toán các phản ứng quan trọng của kết cấu. Để thuận lợi cho việc xây dựng ma trận cản, mô hình cản Rayleigh thường được sử dụng. Tuy nhiên, kết quả phân tích khi sử dụng cản Rayleigh có thể bị sai lệch so với thực tế. Nghiên cứu này nhằm mục đích đánh giá sai số của một số phản ứng quan trọng của kết cấu công trình, gồm chuyển vị đỉnh và lực cắt đáy, khi sử dụng cản Rayleigh so với cản hằng số, loại cản gần giống với thực tế. Phản ứng của các mô hình khảo sát được phân tích động theo lịch sử thời gian thông qua phương pháp số Newmark. Việc khảo sát cho thấy sai số tuyệt đối trung bình chuyển vị đỉnh và lực cắt đáy giữa mô hình cản Rayleigh và cản hằng số là rất lớn. Giá trị sai số chuyển vị đỉnh cao nhất là 13,22 % và sai số lực cắt đáy lớn nhất là 34,98 %.

**KEYWORDS**

Earthquake  
Damping matrix  
Fluctuating forms  
Ground acceleration  
Time history

**ABSTRACT**

Damping matrix in dynamic problem has a direct influence on the calculation results of important structural responses. To facilitate the determination of the damping matrix, the Rayleigh damping model is frequently employed. Nevertheless, when Rayleigh damping are applied in practice, the analysis results show that Rayleigh damping may offer some values deviating from reality. This study aims to evaluate the error of some important responses of the structures, including peak displacement and base shear force when using Rayleigh damping compared to constant damping, which is close to reality. The responses of the survey models were dynamically analyzed over time history through the Newmark numerical method. The results of the survey shows that the average absolute error of the peak displacement and the base shear force between the Rayleigh damping model and the constant damping model is very large. The highest peak displacement error value is 13.22 % and the maximum base shear error value is 34.98 %.

**1. Đặt vấn đề:**

Phương trình vi phân chủ đạo của hệ nhiều bậc tự do chịu rung động nền được trình bày như công thức 1.

$$[M]\ddot{u} + [C]\dot{u} + [K]u = -[M]\{i\}\ddot{u}_g \tag{1}$$

trong đó: [M] = ma trận khối lượng;

[C] = ma trận cản;

[K] = ma trận độ cứng;

{i} = véc tơ ảnh hưởng của chuyển động nền đơn vị;

$\ddot{u}_g$  = gia tốc nền;

$\ddot{u}, \dot{u}, u$  = véc tơ gia tốc tương đối, vận tốc tương đối và chuyển vị tương đối.

Ma trận cản của kết cấu không thể được tính toán từ những thông số về kích thước và vật liệu của kết cấu. Do đó, các hệ số của ma trận cản được xác định từ thực nghiệm, cụ thể là từ tỉ số cản của các mode.

Kết quả đo được từ nhiều thí nghiệm cho thấy rằng trong một kết cấu thì tỉ số cản của các mode là xấp xỉ nhau (Chopra, 2015).

Để thuận lợi cho việc xây dựng ma trận cản cũng như sự phân tích số theo lịch sử thời gian, một số tác giả thường sử dụng mô hình cản cổ điển. Ma trận cản cổ điển là ma trận sao cho tích  $[\phi]^T[C][\phi]$  có dạng là một ma trận đường chéo (trong đó  $[\phi]$  là ma trận mode). Điều này giúp cho ta có thể tính toán được phản ứng của kết cấu bằng phương pháp chồng chất mode. Một trong số những cách làm cho tích  $[\phi]^T[C][\phi]$  có dạng là một ma trận đường chéo là giả sử ma trận [C] được biểu diễn dưới dạng tổ hợp của ma trận khối lượng [M] và ma trận độ cứng [K] như trong công thức 2 (Chopra, 2015).

$$[C] = a_m[M] + a_k[K] \tag{2}$$

Trong đó:  $a_m$  và  $a_k$  là các hằng số.

Khi ma trận [C] được phân tích theo ma trận khối lượng [M] và ma trận độ cứng [K] như công thức 2 thì cản đó được gọi là cản Rayleigh. Trong trường hợp đặc biệt, nếu  $a_m = 0$  thì ma trận cản được gọi là cản tỉ lệ độ cứng, nếu  $a_k = 0$  thì ma trận cản được gọi là cản tỉ lệ khối lượng.

Gọi tỉ số cản của hai modes có tần số vòng tự nhiên  $\omega_i$  và  $\omega_j$  lần lượt là  $\zeta_i$  và  $\zeta_j$  thì các hằng số  $a_M$  và  $a_K$  sẽ được xác định theo công thức 3a và 3b.

$$a_M = \frac{2}{\frac{\omega_j - \omega_i}{\omega_i} - \frac{\zeta_j}{\omega_j}} \left( \omega_j \zeta_i - \frac{\zeta_j}{\omega_j} \right) \tag{3a}$$

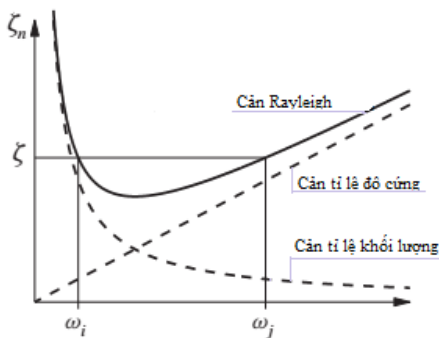
$$a_K = \frac{2}{\frac{\omega_j - \omega_i}{\omega_i} - \frac{\zeta_j}{\omega_j}} \left( -\omega_j \zeta_i + \frac{\zeta_j}{\omega_j} \right) \tag{3b}$$

Trong trường hợp  $\zeta_i = \zeta_j = \zeta$  thì:

$$a_M = \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \zeta \tag{4a}$$

$$a_K = \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \zeta \tag{4b}$$

Cán cổ điển được xây dựng từ tỉ số cản của hai modes và thường là hai tỉ số này bằng nhau. Khi đó tỉ số cản của các mode khác hoặc là sẽ lớn hơn hoặc là sẽ bé hơn tỉ số cản được chọn này (Hình 1). Điều này không đúng với thực tế là tỉ số cản của các mode xấp xỉ nhau. Vì vậy, kết quả phân tích số theo lịch sử thời gian khi sử dụng cán Rayleigh có thể sai lệch so với thực tế.



**Hình 1.** Sự biến thiên của tỉ số cản theo tần số vòng tự nhiên của các mode.

Mục đích của bài báo này là đánh giá sai số của một số phản ứng quan trọng của kết cấu công trình, gồm chuyển vị đỉnh và lực cắt đáy, khi sử dụng cán Rayleigh so với cán hằng số.

**2. Mô hình khảo sát:**

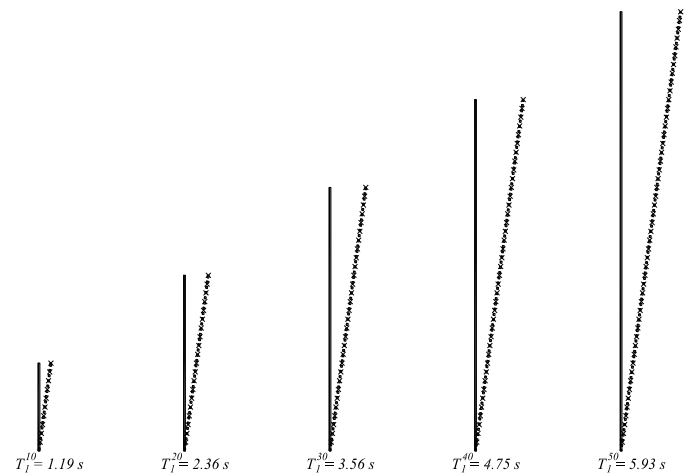
Bài báo này khảo sát các công trình giả định có số tầng khác nhau, gồm 10 đến 50 tầng. Giả sử kết cấu công trình là bê tông cốt thép, khối lượng tham gia dao động do động đất là 1 t/m<sup>2</sup>. Quy mô, kích thước và khối lượng của các công trình giả định này được thể hiện trên Bảng 1, trong đó chiều cao mỗi tầng là 3,8 m.

**Bảng 1.**

Dữ liệu về các mô hình

Số tầng	Tổng chiều cao	Chiều rộng	Khối lượng
	H (m)	B (m)	m <sub>i</sub> (N)
10	38	8	2166000
20	76	15	2166000
30	114	23	2166000
40	152	30	2166000
50	190	38	2166000

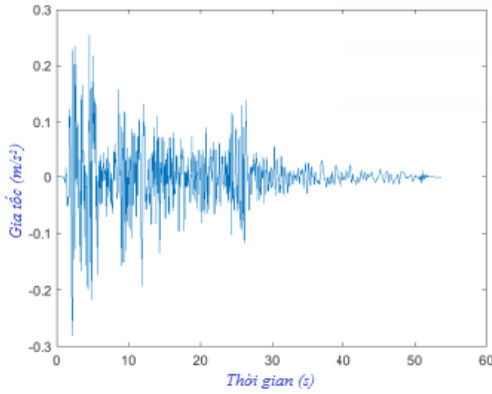
Mô hình kết cấu khảo sát là mô hình khung chịu cắt. Ứng xử được giả thiết là đàn hồi. Khối lượng của các tầng được tập trung về các nút. Độ cứng của các tầng được tính toán dựa trên giả thiết về chu kỳ và hình dạng của mode 1 (Dao và cs., 2019)[3]. Giả thiết chu kỳ mode 1 của các mô hình khảo sát từ 10 đến 50 tầng là 1.19s, 2.36s, 3.56s, 4.75s và 5.93s. Hình dạng của mode 1 được giả thiết là thay đổi tuyến tính theo chiều cao. Hình 2 thể hiện chu kỳ và hình dạng mode 1 của các mô hình khảo sát.



**Hình 2.** Chu kỳ và hình dạng mode 1 của các mô hình khảo sát từ 10 đến 50 tầng.

Để khảo sát về ảnh hưởng của mô hình cản thì sử dụng hai loại mô hình là cán Rayleigh và cán hằng số. Mô hình có hệ số cản Rayleigh theo công thức 2 được gọi là mô hình Rayleigh. Mô hình sử dụng hệ số cản hằng số ( $\zeta = 5\%$ ) gọi là ConstDamp. Hệ số cản được kiến nghị sử dụng trong tính toán động đất là  $\zeta = 5\%$  (Chopra, 2015).[1]

Xét ứng xử các mô hình kết cấu chịu tác dụng của băng gia tốc nền El Centro 1940 (thành phần N-S) có lịch sử gia tốc như Hình 3 (<https://ngawest2.berkeley.edu/>) [4]. Phản ứng của các kết cấu được xác định bằng cách tích phân trực tiếp các phương trình vi phân chuyển động, sử dụng các giàn đồ gia tốc ghi được hoặc giàn đồ gia tốc mô phỏng biểu thị các chuyển động nền.



Hình 3. Lịch sử gia tốc của trận động đất El Centro 1940.

Phản ứng của các mô hình được phân tích theo lịch sử thời gian thông qua phương pháp số Newmark với bước thời gian  $\Delta t = 0,01$  s. Phân tích này được thực hiện bằng phần mềm Sap2000. Chuyển vị đỉnh và lực cắt đáy được tính toán bằng cách sử dụng các bước sau (Wilson, 2002): [2]

**Bước 1:** Thiết lập các ma trận khối lượng  $[M]$ , ma trận độ cứng  $[K]$ , ma trận hệ số cản  $[C]$ .

**Bước 2:** Tính véc-tơ lực động đất hữu hiệu  $\{P\}$

$$\{P\} = -[M]\{i\}\ddot{u}_g$$

Trong đó:  $\{i\}$

- véc-tơ ảnh hưởng của chuyển động nền đơn vị;

$\ddot{u}_g$  - gia tốc nền.

**Bước 3:** Chọn các hằng số Newmark  $\beta$ ,  $\gamma$ .

**Bước 4:** Tính các hằng số

$$b_1 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}$$

$$b_2 = -\frac{1}{\beta \cdot \Delta t}$$

$$b_3 = 1 - \frac{1}{2\beta}$$

$$b_4 = \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t}$$

$$b_5 = 1 - \frac{\gamma}{\beta}$$

$$b_6 = \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \cdot \Delta t$$

**Bước 5:** Thiết lập ma trận độ cứng hữu hiệu

$$[K] = [K] + b_4[C] + b_1[M]$$

**Bước 6:** Xác định chuyển vị ban đầu  $\{u\}_0$  và vận tốc ban đầu  $\{\dot{u}\}_0$ .

Gia tốc ban đầu được tính theo công thức sau:

$$\{\ddot{u}\}_0 = \frac{\{P\}_0 - [C]\{\dot{u}\}_0 - [K]\{u\}_0}{[M]}$$

**Bước 7:** Cho  $i = 1$

**Bước 8:** Tính lực động đất hữu hiệu  $\bar{P}_i$

$$\bar{P}_i = P_i + M(b_1 u_{i-1} - b_2 \dot{u}_{i-1} - b_3 \ddot{u}_{i-1}) + C(b_4 u_{i-1} - b_5 \dot{u}_{i-1} - b_6 \ddot{u}_{i-1})$$

**Bước 9:** Tính véc-tơ chuyển vị  $\{u\}_i$  tại thời điểm  $t_i$

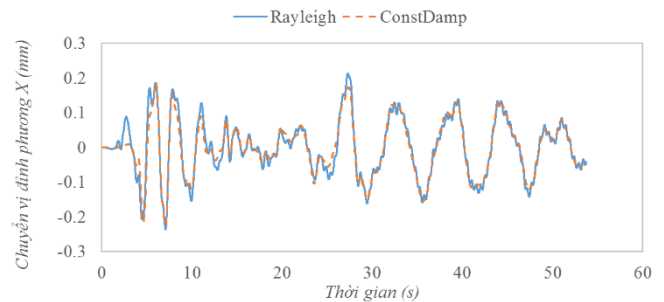
$$u_i = \bar{K}^{-1} \bar{P}$$

**Bước 10:** Tăng  $i = i + 1$  rồi thực hiện lại **Bước 7**.

Kết quả chuyển vị đỉnh và lực cắt đáy của hai mô hình cản Rayleigh và cản hằng số được trình bày trong phần tiếp theo.

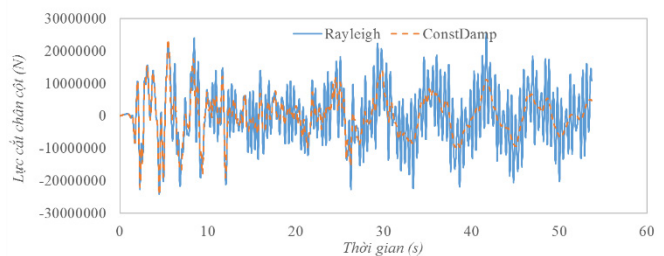
### 3. Kết quả và thảo luận:

Hình 3 biểu diễn lịch sử của chuyển vị mô hình cản Rayleigh và cản ConstDamp của công trình giả định 50 tầng khi chịu tác động của băng gia tốc El Centro 1940 (thành phần N-S). Rõ ràng hai lịch sử chuyển vị này là khác nhau. Chuyển vị đỉnh của chúng cũng sai lệch nhau, giá trị sai số 13,22 %.



Hình 3. Chuyển vị mô hình cản Rayleigh và cản ConstDamp của công trình giả định 50 tầng.

Lực cắt đáy trong phân tích theo lịch sử thời gian của mô hình cản Rayleigh và ConstDamp được trình bày trên Hình 4. Cũng như phản ứng chuyển vị, lực cắt đáy trong mô hình cản Rayleigh cũng khác xa lực cắt đáy trong mô hình cản ConstDamp. Giá trị sai số lực cắt đáy của hai mô hình là 34,98 %.



Hình 4. Lực cắt đáy mô hình cản Rayleigh và cản ConstDamp của công trình giả định 50 tầng.

Để đánh giá sai số do việc sử dụng mô hình cản cổ điển, sai số tuyệt đối trung bình  $|\bar{\Delta}|$  của mỗi mô hình (Bảng 1) được tính toán theo công thức 4. Kết quả sai số được trình bày trong Bảng 2.

$$|\bar{\Delta}| = \frac{\sum_n \left| \frac{x_c - x_e}{x_e} \right|}{n} \quad (5)$$

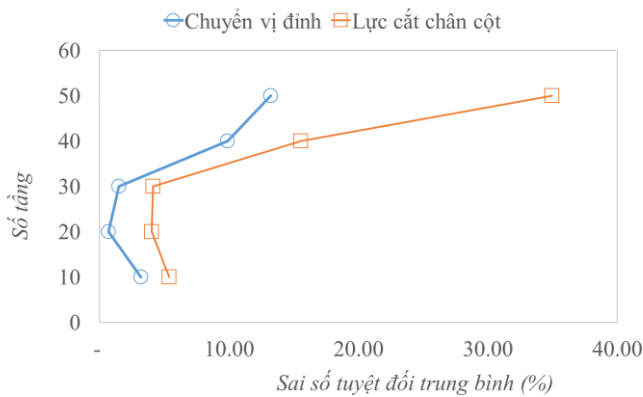
Trong đó:  $x_c, x_e$  - lần lượt là các phản ứng chuyển vị đỉnh (hoặc lực cắt đáy) của mô hình ConstDamp, Rayleigh;

$n$  - số mô hình mô phỏng.

**Bảng 2.**

Sai số do việc sử dụng mô hình cản cổ điển.

Số tầng	Tổng chiều cao	Sai số tuyệt đối trung bình (%)	
	H (m)	Chuyển vị đỉnh phương X	Lực cắt chân cột
10	38.0	3.19	5.39
20	76.0	0.70	4.04
30	114.0	1.49	4.13
40	152.0	9.89	15.54
50	190.0	13.22	34.98



**Hình 5.** Sai số tuyệt đối trung bình chuyển vị đỉnh và lực cắt đáy của mô hình cản cổ điển.

Hình 5 trình bày mối quan hệ giữa sai số tuyệt đối trung bình của chuyển vị đỉnh, lực cắt đáy và tổng số tầng trong các mô hình khảo sát. Dữ liệu cho thấy rằng các mô hình có bậc tự do cao thì sai số tuyệt đối trung bình chuyển vị đỉnh và lực cắt đáy giữa hai mô hình là rất lớn. Giá trị của các sai số là rất đáng kể. Từ 40 tầng, sai số chuyển vị đỉnh theo phương X là lớn hơn 9 % và sai số lực cắt đáy của hai mô hình là hơn 15 %.

**4. Kết luận:**

Bài báo này đánh giá sai số của một số phản ứng quan trọng của kết cấu công trình, gồm chuyển vị đỉnh và lực cắt đáy, khi sử dụng cản Rayleigh so với cản hằng số được tính toán từ phương pháp phân tích lịch sử thời gian. Việc khảo sát cho thấy sai số tuyệt đối trung bình chuyển vị đỉnh và lực cắt đáy giữa mô hình cản Rayleigh và cản hằng số là rất lớn. Giá trị sai số chuyển vị đỉnh cao nhất là 13,22 % và sai số

lực cắt đáy lớn nhất là 34,98 %. Dựa trên kết quả khảo sát, mô hình cản Rayleigh cho kết quả phân tích lớn hơn so với cản hằng số (gần với thực tế hơn). Vì vậy việc sử dụng mô hình cản Rayleigh có thể đánh giá quá cao phản ứng của kết cấu dẫn đến lãng phí trong thiết kế./.

**Tài liệu tham khảo**

- [1]. Anil K.Chopra (2015). “Dynamics of Structures”, Prentice-Hall. Fifth edition.
- [2]. E.L. Wilson (2002). “Statics and Dynamics analysis of Structures”. Computer and Structure, Inc.
- [3]. ND Dao, KL Ryan, H Nguyen-Van (2019), Evaluating simplified models in predicting global seismic responses of a shake table–test building isolated by triple friction pendulum bearings, Earthquake Engineering & Structural Dynamics 48 (6), 594-610
- [4]. PEER Ground Motion Database (2021), <https://ngawest2.berkeley.edu/>