

Ứng dụng phần mềm Maple giải một số bài toán tĩnh học

Phạm Thị Hà Giang^{1*}

¹ Bộ môn Cơ học lý thuyết, Khoa Xây dựng, Đại học Kiến Trúc Hà Nội

TỪ KHOẢ

Maple
Cơ học cơ sở
Tĩnh học
Sơ đồ khối
Lập trình

TÓM TẮT

Việc sử dụng các phần mềm toán học trong học tập, công việc hoặc nghiên cứu khoa học hiện nay là thiết yếu. Vì vậy, các trường Đại học thuộc khối kỹ thuật của Việt Nam đã bắt đầu giới thiệu và hướng dẫn sinh viên sử dụng các phần mềm toán học trong quá trình giảng dạy các môn học chuyên ngành và cơ sở ngành. Đối với môn Cơ học cơ sở thì các tài liệu hướng dẫn sử dụng các phần mềm toán học vào việc giải các bài toán Cơ học còn hạn chế. Maple là một công cụ tính toán mạnh, hơn nữa Maple còn có giao diện thân thiện với người dùng. Nghiên cứu này đưa ra hướng dẫn cụ thể để người đọc có thể tiếp cận một cách dễ dàng phần mềm Maple và ứng dụng giải các bài toán tĩnh học.

KEYWORDS

Maple
Classical mechanics
Statics
Block diagram
Programming

ABSTRACT

Nowadays it is essential to apply mathematical software in study or scientific research. Therefore, Vietnam's technical universities have begun to introduce and guide students through the applying mathematical software in specialized subjects. For classical Mechanics, the instructional documents on using mathematical software to solve mechanical problems are limited. Maple is a powerful calculation tool, and Maple also has a user-friendly interface. This study provides specific instructions so that readers can apply Maple to solve statics problems easily.

1. Giới thiệu

Trong khoa học và kỹ thuật hiện nay, việc sử dụng các phần mềm hỗ trợ để triển khai các bước tính toán cụ thể trong các bài toán kỹ thuật là thực sự cần thiết. Tính toán bằng các phần mềm hỗ trợ đưa ra các kết quả số chính xác và nhanh hơn tính toán thủ công đặc biệt là đối những phép tính toán phức tạp. Các kỹ năng sử dụng phần mềm càng tốt thì hiệu quả công việc càng cao. Do đó việc giới thiệu tới sinh viên khối ngành kỹ thuật các phần mềm hỗ trợ tính toán là cần thiết. Trong các phần mềm toán học hiện nay, Maple [1] là một trong những phần mềm hỗ trợ cho cả tính toán số và tính toán hình thức tốt nhất được các nhà khoa học và các kỹ sư tin dùng [2].

Cơ học cơ sở là môn học cơ sở cho khối ngành kỹ thuật nghiên cứu sự cân bằng và chuyển động của các vật rắn dưới tác dụng của các lực [3-5]. Tĩnh học là phần đầu tiên của Cơ học cơ sở trang bị cho người học các kiến thức cơ sở về hệ lực, cách thu gọn hệ lực, tính mô men của các lực đối với một điểm, một trục và ngẫu lực; các loại liên kết cơ bản; điều kiện cân bằng của vật thể chịu lực. Học phần này giúp cho người học có thể xét cân bằng của các vật rắn (thường là các kết cấu tĩnh định) chịu các loại hệ lực, tính được các phản lực liên kết. Học phần cũng nghiên cứu sự cân bằng và xác định ứng lực trong các thanh của dàn phẳng tĩnh định. Hiện nay tại Việt Nam, học phần Tĩnh học được giảng dạy theo phương pháp truyền thống. Người dạy cung cấp cơ sở lý thuyết; hướng dẫn người học áp dụng lý thuyết để phân tích và giải các bài toán cụ thể và các bài toán vẫn được thực hiện bằng phương pháp “thủ công”. Theo xu thế phát triển của khoa

học kỹ thuật hiện đại, trên thế giới đã có nhiều trường đại học giảng dạy môn học này bằng cách cho sinh viên tiếp cận với phần mềm tính toán ví dụ như Maple [6]. Sử dụng các phần mềm sẽ giảm thiểu khối lượng tính toán cho người học. Từ đó giúp người học tiếp thu kiến thức môn học một cách dễ dàng và hứng thú hơn. Quá trình lập trình giải các bài toán cơ học sẽ giúp người học hiểu rõ bản chất bài toán và các phương pháp giải một cách tường minh. Hơn nữa được tiếp cận với việc lập trình giải các bài toán Cơ học cơ sở, phần Tĩnh học sẽ tạo tiền đề tốt để sinh viên có thể ứng dụng phần mềm tính toán trong các môn học chuyên ngành cũng như phục vụ cho công tác chuyên môn trong tương lai của sinh viên.

Như đã phân tích ở trên việc ứng dụng phần mềm để giải các bài toán Tĩnh học là cần thiết, phù hợp với xu hướng phát triển của khoa học kỹ thuật hiện đại. Maple không những là một công cụ tính toán mạnh mà còn có giao diện rõ ràng, hình thức đẹp mắt, phù hợp để sinh viên đang học môn Cơ học cơ sở (thường là sinh viên năm thứ hai) áp dụng tại các trường đại học kỹ thuật. Tuy nhiên, hiện nay tại Việt Nam, số lượng các tài liệu hệ thống các bài toán của Tĩnh học đồng thời hướng dẫn ứng dụng phần mềm Maple để giải các bài toán này còn hạn chế. Mục tiêu của bài báo này là hệ thống lại các bài toán Tĩnh học, thiết lập sơ đồ khối cho các bài toán tĩnh học và viết các chương trình giải toán trong môi trường phần mềm Maple.

2. Giới thiệu về Maple

*Liên hệ tác giả: hagiang813@gmail.com

Nhận ngày 13/05/2023, sửa xong ngày 04/10/2023, chấp nhận đăng 11/10/2023

Link DOI: <https://doi.org/10.54772/jomc.05.2023.579>

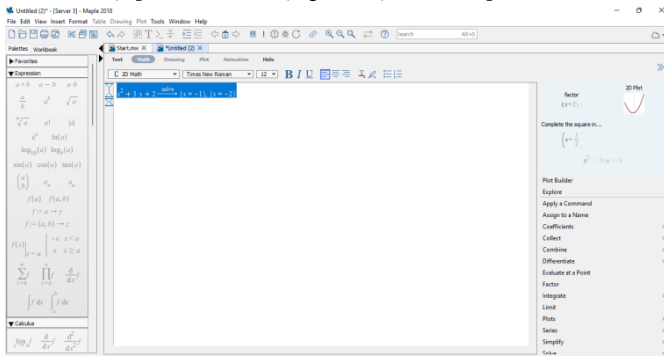
Maple có 2 chế độ giao diện chính là “Document” và “Worksheet”. Các chức năng và đặc tính của 2 chế độ này là như nhau, chúng chỉ khác nhau ở một điểm chủ yếu là vùng nhập dữ liệu vào.

2.1. Chế độ Document

Chế độ này sử dụng khối văn bản (Document block) làm vùng nhập dữ liệu mặc định. Một khối văn bản được xác định bởi hai tam giác nằm trên cột phía bên trái (Markers) của trang làm việc. Nếu không thấy cột Markers, hãy vào menu View chọn Markers. Chế độ này giúp ta thực hiện các thao tác một cách chủ động trên các đối tượng hoặc biểu diễn toán học bằng cách dùng Context menu (Hình 1).

Ví dụ: $x^2 + 3 \cdot x + 2 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -1\}, \{x = -2\}$

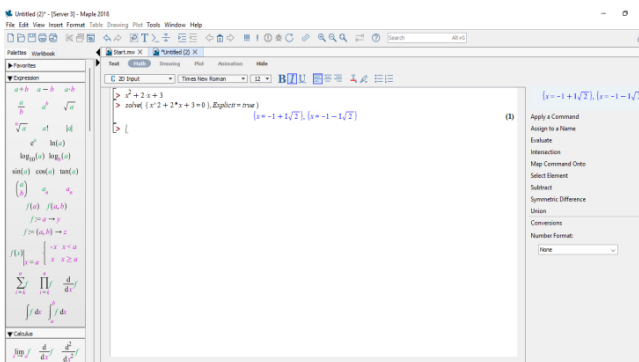
Chú ý: Nếu trên cửa sổ làm việc không xuất hiện Context panel thì kích chuột phải vào đối tượng và chọn Context panel.



Hình 1. Giao diện chế độ Document.

2.2. Chế độ Worksheet

Chế độ này sử dụng dấu nhắc lệnh ([>] [xem Hình 2] trong vùng nhập dữ liệu. Khi sử dụng Context menu ngữ cảnh trong chế độ này, tất cả các cú pháp lệnh sẽ được hiển thị.



Hình 2. Giao diện chế độ làm việc Worksheet.

2.3. Một số lệnh thường dùng giải các bài toán Cơ học

a) Khai báo hàm số

> f := x^2 + 3*x + 2 #hàm biến x

Để khai báo hàm phụ thuộc tham số ta dùng dấu ->

> f1 := m -> x x^2 + 3*x + 2 + m

b) Vẽ đồ thị 2D

Gói lệnh: with(plots)

Lệnh: plot((f(x),x=a..b,options);

Có thể click phím phải chuột vào đồ thị để chọn options.

Ví dụ:

> with(plots)

Plot(f,x=-2..2,thickness=2,title="Do thi ham bac 2e")

c) Giải phương trình: lệnh solve

Ví dụ

> PT := x^2 + 3*x + 2

> N := solve(PT,{x}) #giải phương trình PT=0

Khi đó kết quả hiển thị trên màn hình là {x = -1}, {x = -2}.

Vậy PT=0 có 2 nghiệm phân biệt là -1 và 2.

+ Giải hệ phương trình: lệnh solve

Ví dụ:

> pt1 := 4*x + 2*y = 4;

> pt2 := 2*x + 3*y = 7;

> solve({pt1, pt2}, {x, y})

Kết quả chúng ta nhận được là {x = - 1/4, y = 5/2}.

d) Tính toán với véc tơ

Các phép tính với véc tơ chúng ta dùng gói lệnh đại số tuyến tính

> with(linalg)

> v := vector(3,[1,2,3]: > v = [1,2,3] # véc tơ dòng

> u := <4,5,6> #véc tơ cột

> dotprod(v,u) # tích vô hướng

> crossprod(v,u) # tích véc tơ.

3. Bài toán cân bằng của hệ vật dưới tác dụng hệ lực phẳng

3.1. Bài toán: Khảo sát một cơ hệ gồm n vật rắn S₁.S₂...S_n cân bằng dưới tác dụng của hệ lực phẳng.

Áp dụng nguyên lý giải phóng liên kết, chúng ta tách và xét cân bằng từng vật một. Đối với mỗi vật ta có 3 phương trình cân bằng:

$$\sum_{j=1:m} X_j^k = 0; \quad \sum_{j=1:m} Y_j^k = 0; \quad \sum_{j=1:m} \bar{m}_o(\vec{F}_j^k) = 0; \quad k = \overline{1:n} \quad (I)$$

Trong đó \vec{F}_j^k là lực thứ j tác dụng vào S_k. Vì cơ hệ ta xét gồm n vật nên ta sẽ có 3n phương trình cân bằng. Các phương trình này độc lập với nhau.

Cộng n phương trình hình chiếu các lực lên trục x ta có: $\sum_k \sum_j X_j^k = 0;$

Tương tự đối với n phương trình hình chiếu các lực lên trục y, và n phương trình mô men ta có

$$\sum_k \sum_j Y_j^k = 0; \quad ; \quad \sum_k \sum_j \bar{m}_o(\vec{F}_j^{ki}) = 0;$$

Vì các cặp nội lực là trực đối nhau nên

$$\sum_k \sum_j X_j^{ki} = 0; \quad \sum_k \sum_j Y_j^{ki} = 0; \quad ; \quad \sum_k \sum_j \bar{m}_o(\vec{F}_j^{ki}) = 0;$$

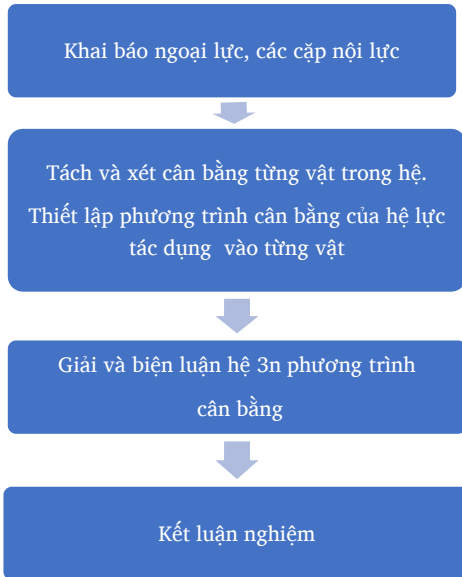
Từ đây ta có:

$$\sum_k \sum_j X_j^{ke} = 0; \quad \sum_k \sum_j Y_j^{ke} = 0; \quad ; \quad \sum_k \sum_j \bar{m}_o(\vec{F}_j^{ke}) = 0; \quad (II)$$

Đây là hệ 3 phương cân bằng ta thu được khi hóa rắn và xét cân bằng của cơ hệ n vật rắn S_1, S_2, \dots, S_n . Như vậy hệ phương trình (II) là hệ quả của hệ phương trình (I) và số phương trình cân bằng độc lập tối đa mà ta có được khi xét cơ hệ n vật là $3n$.

3.2. Phương pháp giải

Phương pháp tách riêng từng vật để xét cân bằng khi đó ta thu được hệ 3n phương trình cân bằng (I).



a. Sơ đồ khối giải bài toán cân bằng hệ vật rắn dưới tác dụng của hệ lực phẳng bằng phương pháp tách riêng từng vật

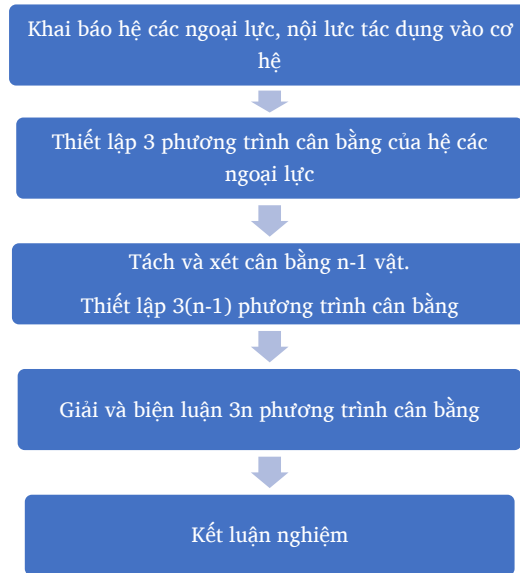
Phương pháp hóa rắn kết hợp tách vật:

- Bước 1: Hóa rắn và xét cân bằng toàn hệ thu được hệ 3 phương trình cân bằng (II).

- Bước 2: Tách và xét cân bằng n-1 vật thu được $3(n-1)$ phương trình cân bằng.

$$\sum_{j=1:m} X_j^k = 0; \quad \sum_{j=1:m} Y_j^k = 0; \quad \sum_{j=1:m} \bar{m}_o(\bar{F}_j^k) = 0; \quad k = \overline{1:n-1} \quad (I)$$

3.3. Sơ đồ khối



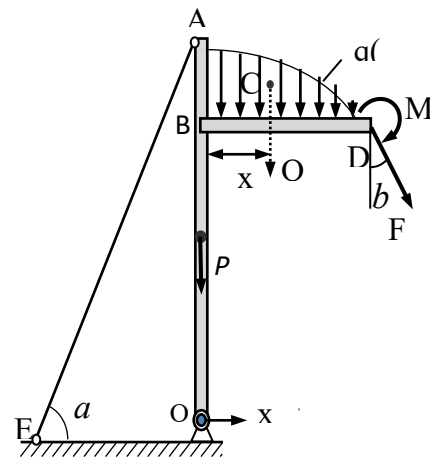
b. Sơ đồ khối giải bài toán cân bằng hệ vật rắn dưới tác dụng của hệ lực phẳng bằng phương pháp hóa rắn kết hợp với tách vật

3.4. Ví dụ 1 (Đề thi Olympic năm 2014)

Hệ cân bằng trong mặt phẳng đứng như Hình 3.1. Cột OA thẳng đứng, trọng lượng P. Thanh ngang BD trọng lượng không đáng kể gắn cứng với cột, chịu tác dụng của lực F, ngẫu lực có mômen M và hệ lực phân bố với cường độ q(x). Dây AE tạo với nền ngang góc α ;

Số liệu: $OA = h_1 = 10 \text{ m}; OB = h_2 = 8 \text{ m}; BD = l = 3 \text{ m};$
 $q(x) = 9 - x^2 \text{ N/m}; P = 5000 \text{ N}; F = 40 \times Q; M = 75l^2 \text{ Nm};$
 $a_{min} = 45^\circ, a_{max} = 80^\circ, b = 25^\circ$

- *1) Xác định hợp lực Q, khoảng cách x_c .
- *2) Xác định lực căng T dây AE, các lực liên kết tại O và B phụ thuộc góc α .
- *3) Vẽ đồ thị $T(\alpha); \alpha = [a_{min}, a_{max}]$
- *4) Khi $\alpha = \alpha_0 = 67^\circ$, xác định trị số của T và các lực liên kết tại O, B.



Hình 3. Hệ cân bằng trong mặt phẳng đứng.

Lời giải trên phần mềm Maple.

> #hop luc he luc phan bo

> $Q := \int_0^3 (9 - x^2) dx$

$Q := 18$ (1)

> $x_C := \frac{\int_0^3 x(9 - x^2) dx}{\int_0^3 (9 - x^2) dx}$

$x_C := \frac{9}{8}$ (2)

> #Phan luc can tim XO, YO, XB, YB, Mb, Sae #Xet can bang OA

> $X1 := XO + XB - Sae \cos(\alpha)$; $Y1 := YO + YB - Sae \sin(\alpha) - 5000$; $Mb1 := 2 \cdot Sae \cos(\alpha) + Mb + 8 \cdot XO$; #phuong trinh chieu luc len truc x, y, phuong trinh mo men voi B

$X1 := XO + XB - Sae \cos(\alpha)$
 $Y1 := YO + YB - Sae \sin(\alpha) - 5000$
 $Mb1 := 2 \cdot Sae \cos(\alpha) + Mb + 8 \cdot XO$

(3)

> #Xet can bang BD

> $X2 := -XB + 40 \cdot \int_0^3 (9 - x^2) dx \cdot \sin\left(\frac{25\pi}{180}\right)$; $Y2 := -YB - \int_0^3 (9 - x^2) dx - 40 \cdot \int_0^3 (9 - x^2) dx \cdot \cos\left(\frac{25\pi}{180}\right)$; $Mb2 := -Mb - \int_0^3 (9 - x^2) dx \cdot \frac{\int_0^3 x(9 - x^2) dx}{\int_0^3 (9 - x^2) dx} - 40 \cdot \int_0^3 (9 - x^2) dx \cdot \cos\left(\frac{25\pi}{180}\right) - 75 \cdot 3^2$;

$X2 := -XB + 720 \sin\left(\frac{5\pi}{36}\right)$
 $Y2 := -YB - 18 - 720 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right)$
 $Mb2 := -Mb - \frac{2781}{4} - 2160 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right)$

(4)

• solve($\left\{ \begin{aligned} XO + XB - Sae \cos(\alpha) = 0, YO + YB - Sae \sin(\alpha) - 5000 = 0, 2 \cdot Sae \cos(\alpha) + Mb + 8 \cdot XO = 0, -XB + 720 \sin\left(\frac{5\pi}{36}\right) = 0, -YB - 18 - 720 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right) = 0, -Mb - \frac{2781}{4} - 2160 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right) = 0 \end{aligned} \right\}$, {XO, XB, Sae, YO, YB, Mb})

$Mb = -2160 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right) - \frac{2781}{4}$, $Sae = \frac{9}{40} \frac{960 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right) + 2560 \sin\left(\frac{5\pi}{36}\right) + 309}{\cos(\alpha)}$, $XB = 720 \sin\left(\frac{5\pi}{36}\right)$, $XO = -144 \sin\left(\frac{5\pi}{36}\right) + 216 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right) + \frac{2781}{40}$, $YB = -18 - 720 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right)$, $YO = \frac{1}{40} \frac{8640 \sin(\alpha) \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right) + 23040 \sin(\alpha) \sin\left(\frac{5\pi}{36}\right) + 28800 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right) \cos(\alpha) + 2781 \sin(\alpha) + 200720 \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

• evalf($Mb = -2160 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right) - \frac{2781}{4}$); evalf($Sae = \frac{9(2560 \sin\left(\frac{5\pi}{36}\right) + 960 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right) + 309)}{40 \cos(\alpha)}$); evalf($XB = 720 \sin\left(\frac{5\pi}{36}\right)$); evalf($XO = -144 \sin\left(\frac{5\pi}{36}\right) + 216 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right) + \frac{2781}{40}$); evalf($YB = -18 - 720 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right)$); evalf($YO = \frac{8640 \sin(\alpha) \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right) + 23040 \sin(\alpha) \sin\left(\frac{5\pi}{36}\right) + 28800 \cos\left(\frac{5\pi}{36}\right) \cos(\alpha) + 2781 \sin(\alpha) + 200720 \cos(\alpha)}{40 \cos(\alpha)}$) #dua ve gia tri thap phan

$Mb = -2652.874820$

$Sae = \frac{508.7156008}{\cos(\alpha)}$

$XB = 304.2851485$

$XO = 204.4304523$

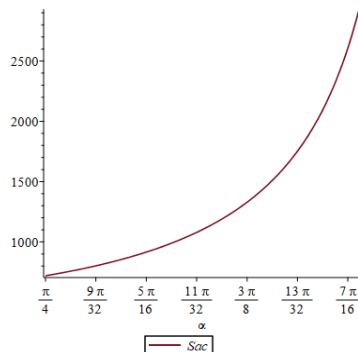
$YB = -670.5416066$

$YO = \frac{0.02500000000(20348.62403 \sin(\alpha) + 2.268216643 \cdot 10^5 \cos(\alpha))}{\cos(\alpha)}$ (6)

> $Sae(\alpha) := \frac{508.7156008}{\cos(\alpha)}$

$Sae := \alpha - \frac{508.7156008}{\cos(\alpha)}$ (7)

> plot($Sae(\alpha), \alpha = \frac{45\pi}{180} \dots \frac{80\pi}{180}, legend = Sac$)



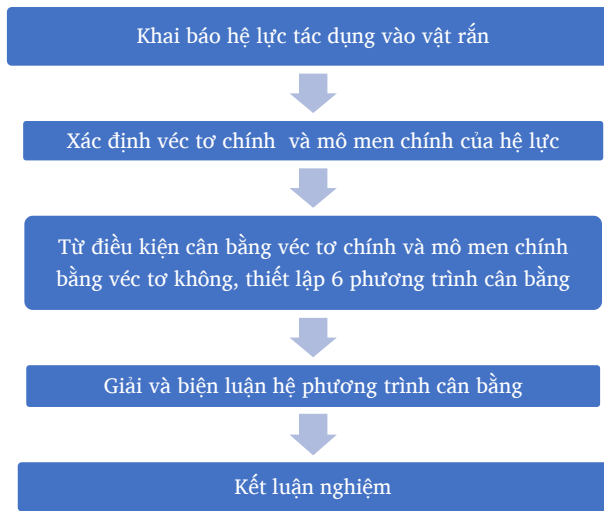
> evalf($Sae\left(\frac{67\pi}{180}\right)$)

1301.958211 (8)

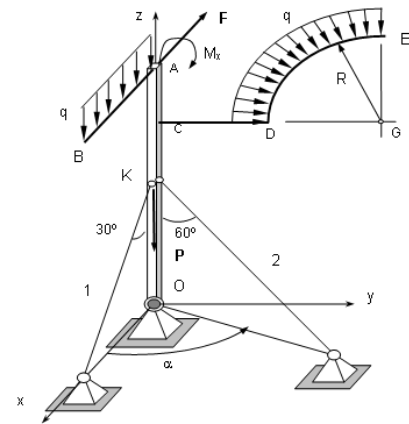
>

4. Bài toán cân bằng vật rắn chịu tác dụng hệ lực không gian

4.1 Sơ đồ khối



4.2. Ví dụ (Bài 1 đề thi Olympic năm 2015)



Hình 4.

Cột OA được giữ cân bằng thẳng đứng nhờ bản lề cầu O, hai thanh không trọng lượng (1 và 2) như Hình 4. Các thanh AB//Ox và CDE (CDG//Oy, cung DE là 1/4 đường tròn tâm G nằm trong Oyz) được hàn chặt vào cột OA. Trọng lượng cột $P = 5000$ N. Lực \vec{F} //x tại A, trị số $F = 500$ N. Ngẫu lực trong mặt phẳng yz có mômen $M_x = 300$ Nm. Các lực phân bố đều có cường độ $q = 100$ N/m (trên đoạn AB lực phân bố thẳng đứng và trên cung DE lực phân bố nằm trong mặt phẳng Oyz và hướng về tâm G). Cho biết các khoảng cách: $OK = KA = 3\text{m}$, $AB = CD = R = 2\text{m}$; $\alpha_{min} = 45^\circ$, $\alpha_{max} = 135^\circ$.

Lời giải trên phần mềm Maple

```

> with(linalg)
[BlochDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat,
charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues,
eigenvectors, eigenvects, enternatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, gemmatrix, grad, hadamard, hermite,
hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor,
minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref,
scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector,
wronskian]
> #Hình chiếu các lực
ROA := [(XO, YO, ZO)]#Phan luc tai O
ROA := [XO, YO, ZO] (2)
P := [(0, 0, -5000)]
P := [0, 0, -5000] (3)
S1 := [(S1*sin(pi/6), 0, -S1*cos(pi/6))]
S1 := [1/2*S1, 0, -1/2*S1*sqrt(3)] (4)
S2 := [(S2*sin(pi/3)*cos(alpha), S2*sin(pi/3)*sin(alpha), -S2*cos(pi/3))]
S2 := [1/2*S2*sqrt(3)*cos(alpha), 1/2*S2*sqrt(3)*sin(alpha), -1/2*S2] (5)
F := [(-500, 0, 0)]
F := [-500, 0, 0] (6)
Q1 := [(0, 0, -200)]
Q1 := [0, 0, -200] (7)
Q2 := [(0, 100*2*sqrt(2)*cos(pi/4), -100*2*sqrt(2)*sin(pi/4))]
Q2 := [0, 200, -200] (8)
MX := [(-300, 0, 0)]
MX := [-300, 0, 0] (9)
    
```

> #điểm đặt lực
 $RO := [(0, 0, 0)]$

$$RO := [0, 0, 0] \tag{10}$$

$RP := [(0, 0, 3)]$

$$RP := [0, 0, 3] \tag{11}$$

$RF := [(0, 0, 6)]$

$$RF := [0, 0, 6] \tag{12}$$

$RQ1 := [(1, 0, 6)]$

$$RQ1 := [1, 0, 6] \tag{13}$$

$RQ2 := [(0, 3, 5.5)]$

$$RQ2 := [0, 3, 5.5] \tag{14}$$

> #vec to chính

> $RO := ROA + P + S_1 + S_2 + F + Q1 + Q2$

$$RO := \left[-500 + \frac{1}{2} S2 \sqrt{3} \cos(\alpha) + \frac{1}{2} S1 + XO, 200 + \frac{1}{2} S2 \sqrt{3} \sin(\alpha) + YO, -5400 - \frac{1}{2} S2 - \frac{1}{2} S1 \sqrt{3} + ZO \right] \tag{15}$$

> #mo men hệ lực đối với O

$crossprod(RP, P)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$crossprod(RP, S_1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} S1 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$crossprod(RP, S_2)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} S2 \sqrt{3} \sin(\alpha) & \frac{3}{2} S2 \sqrt{3} \cos(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$crossprod(RF, F)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3000 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$crossprod(RQ1, Q1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 200 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$crossprod(RQ2, Q2)$

$$\begin{bmatrix} -1700.0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

#mo men chính

$$SI := \begin{bmatrix} 0 & \frac{3S1}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3S2\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2} & \frac{3S2\sqrt{3}\cos(\alpha)}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3000 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 200 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1700.0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$SI := \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} S2 \sqrt{3} \sin(\alpha) - 1700.0 & \frac{3}{2} S1 + \frac{3}{2} S2 \sqrt{3} \cos(\alpha) - 2800 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$solve\left(\left\{ -500 + \frac{S2\sqrt{3}\cos(\alpha)}{2} + \frac{S1}{2} + XO = 0, 200 + \frac{S2\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2} + YO = 0, -5400 - \frac{S2}{2} - \frac{S1\sqrt{3}}{2} + ZO = 0, -\frac{3S2\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2} - 2000 = 0, \frac{3S1}{2} + \frac{3S2\sqrt{3}\cos(\alpha)}{2} - 2800 = 0 \right\}, \{XO, YO, ZO, S1, S2\}\right)$$

$$\left\{ S1 = \frac{800}{3} \frac{5\cos(\alpha) + 7\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)}, S2 = -\frac{4000}{9} \frac{\sqrt{3}}{\sin(\alpha)}, XO = -\frac{1300}{3}, YO = \frac{1400}{3}, ZO = \frac{200}{9} \frac{(30\cos(\alpha) + 42\sin(\alpha) + 81\sqrt{3}\sin(\alpha) - 10)\sqrt{3}}{\sin(\alpha)} \right\} \tag{23}$$

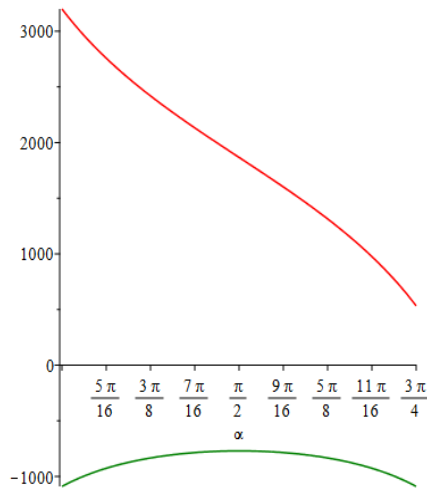
$$S1(\alpha) := \frac{800(7\sin(\alpha) + 5\cos(\alpha))}{3\sin(\alpha)}$$

$$S1 := \alpha \rightarrow \frac{1}{3} \frac{5600\sin(\alpha) + 4000\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \tag{24}$$

$$S2(\alpha) := -\frac{4000\sqrt{3}}{9\sin(\alpha)}$$

$$S2 := \alpha \rightarrow -\frac{4000}{9} \frac{\sqrt{3}}{\sin(\alpha)} \tag{25}$$

$plot([S1(\alpha), S2(\alpha)], \alpha = 45 * \text{Pi} * (1/180) .. 135 * \text{Pi} * (1/180), color = ["Red", "Green"])$



$$\alpha := \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha := \frac{1}{2} \pi \tag{26}$$

$$\text{evalf}\left(S1 = \frac{800 (7 \sin(\alpha) + 5 \cos(\alpha))}{3 \sin(\alpha)}\right)$$

$$S1 = 1866.666667 \tag{27}$$

$$\text{evalf}\left(S2 = -\frac{4000 \sqrt{3}}{9 \sin(\alpha)}\right)$$

$$\alpha := \frac{1}{2} \pi \tag{26}$$

$$\text{evalf}\left(S1 = \frac{800 (7 \sin(\alpha) + 5 \cos(\alpha))}{3 \sin(\alpha)}\right)$$

$$S1 = 1866.666667 \tag{27}$$

$$\text{evalf}\left(S2 = -\frac{4000 \sqrt{3}}{9 \sin(\alpha)}\right)$$

$$S2 = -769.8003590 \tag{28}$$

$$\text{evalf}\left(XO = -\frac{1300}{3}\right)$$

$$XO = -433.3333333 \tag{29}$$

$$\text{evalf}\left(YO = \frac{1400}{3}\right)$$

$$YO = 466.6666667 \tag{30}$$

$$\text{evalf}\left(ZO = \frac{200 (42 \sin(\alpha) + 30 \cos(\alpha) + 81 \sin(\alpha) \sqrt{3} - 10) \sqrt{3}}{9 \sin(\alpha)}\right)$$

$$ZO = 6631.680575 \tag{31}$$

Tài liệu tham khảo

[1]. Inc. Waterloo Maple (2002), *Maple 8 Learning Guide*, Waterloo Maple
 [2]. Chris and Steve Adams. Tocci (1996), *Applied Maple for Engineers and Scientists*, Artech House.
 [3]. David Morin (2008), *Introduction to Classical Mechanics With Problems and Solutions*, Cambridge University Press
 [4]. Russell C. Hibbeler (2009), *Engineering Mechanics--Combined Statics & Dynamics*, 12th Edition, Prentice Hall
 [5]. Ferdinand Beer, Jr., E. Russell Johnston, Elliot Eisenberg, Phillip Cornwell, David Mazurek (2009), *Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics*, McGraw-Hill Education
 [6]. Ronald L. Greene (1995), *Classical Mechanics with Maple*, Springer