

Phân tích dao động phi tuyến có cản của hệ con lắc khối lượng có liên kết đàn hồi và chịu kích động tuần hoàn

Phạm Ngọc Chung

Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Mở - Địa chất, 18 Phố Viên, Phường Đức Thắng, Quận Bắc Từ Liêm, Hà Nội

TỪ KHOẢ

Con lắc
Cân bằng điều hòa
Đáp ứng biên độ - tần số
Hệ số cản
Miền hữu hiệu

TÓM TẮT

Trong nghiên cứu này, các tác giả phân tích dao động có cản của một hệ phi tuyến dạng con lắc - lò xo - khối lượng dưới ảnh hưởng của kích động ngoài tuần hoàn. Bằng cách sử dụng phương pháp cân bằng điều hòa để phân tích đáp ứng hệ, một phương trình bậc ba thu được cho phép xác định quan hệ giữa biên độ và tần số của hệ dao động. Đường cong biên độ - tần số thu được từ phương pháp giải tích được đánh giá so sánh với phương pháp số Runge-Kutta trực tiếp cho hệ phi tuyến ban đầu. Hai trường hợp hệ phi tuyến yếu và phi tuyến mạnh được phân tích chi tiết cho đường cong biên độ - tần số, từ đó dùng vào mục đích thiết kế hệ số cản cho hệ con lắc. Tác giả đưa vào khái niệm miền hữu hiệu cho thiết kế cản. Miền hữu hiệu là miền mà đáp ứng biên độ của hệ phải đảm bảo nhỏ hơn biên độ giới hạn thiết kế trên mọi điểm của miền tần số được xét. Các tác giả chỉ ra ảnh hưởng của đặc tính phi tuyến (yếu và mạnh) lên miền hữu hiệu và từ đó thu được lưới thiết kế cho hệ số cản phục vụ việc tham chiếu trong các thiết kế thực tế.

KEYWORDS

Pendulum
Harmonic balance
Amplitude-frequency response
Damping coefficient
Working zone

ABSTRACT

In this study, the authors analyze the damped nonlinear vibration for a mass pendulum system subjected to periodic excitation. By using the harmonic balance method to analyze the system response, a cubic equation is obtained that allows determining the relationship between amplitude and frequency of the oscillating system. The amplitude - frequency curve obtained from the analytical method is evaluated and compared with the direct Runge-Kutta numerical method for the initial nonlinear system. The two cases of weakly nonlinear and strongly nonlinear systems are analyzed in detail for the amplitude - frequency curve, from which they are used for the purpose of designing the damping coefficient for the pendulum system. The author introduces the concept of working zone for designed damping. The working zone is the zone in which the system's vibration amplitude is smaller or equal to the designed amplitude over the range of frequency response. The authors point out the influence of nonlinear characteristics (weak and strong) on the working zone and thereby obtain a design grid for the damping coefficient to serve as a reference in practical designs.

1. Mở đầu

Con lắc là một hệ cơ học phổ biến và được biết đến từ rất sớm trong lịch sử loài người. Hệ con lắc được ứng dụng trong nhiều ngành khoa học và kỹ thuật khác nhau như ứng dụng trong máy ghi địa chấn, các thiết bị đo đạc thời gian, thiết bị đo nhiệt độ [1], trong thiết bị hao tán năng lượng cho các công trình xây dựng [2] ... Mặc dù có hình học đơn giản nhưng phương trình dao động của con lắc lại là một phương trình phi tuyến. Trong trường hợp dao động nhỏ, phương trình con lắc có thể được xấp xỉ một cách tuyến tính và từ đó các quan hệ cơ học đơn giản có thể được thiết lập. Tuy nhiên với các dao động có góc lớn hơn, các xấp xỉ tuyến tính không còn phù hợp nữa, người ta phải xử lý giải phương trình bằng các công cụ mạnh hơn như phương pháp số hoặc các phương pháp giải tích xấp xỉ. Trong một số tình huống, phương trình dao động của con lắc có thể dẫn đến các hình thái chuyển động phức tạp như chuyển động trong không gian hạn chế với nhiều

pha chuyển động khác nhau (ví dụ con lắc đang chuyển động thì gặp vật cản), chuyển động hỗn độn với con lắc nhiều khâu [3].

Bởi vì phương trình chuyển động của con lắc là phi tuyến nên nó vẫn thu hút nhiều nhà nghiên cứu trong lĩnh vực dao động phi tuyến của các hệ động lực [4]. Các phương pháp có thể sử dụng để tìm chuyển động xấp xỉ của con lắc như phương pháp nhiễu [5], phương pháp cân bằng điều hòa [6], phương pháp tuyến tính hóa [7]. Mục đích của nghiên cứu này là áp dụng phương pháp cân bằng điều hòa để phân tích chuyển động của một hệ con lắc có liên kết đàn hồi dạng lò xo tuyến tính, liên kết cản tuyến tính và chịu kích động điều hòa. Cấu trúc của hệ con lắc đang xét dẫn đến một hệ phi tuyến tương tự như hệ phi tuyến Duffing sau khi các hàm lượng giác được xấp xỉ dừng lại ở đa thức bậc ba của góc lệch. Tuy nhiên hệ số của số hạng bậc ba mang dấu âm, trong khi đó số hạng bậc nhất của góc lệch lại mang dấu dương. Đặc điểm này dẫn đến một số đặc trưng thú vị của chuyển động con lắc. Các tác giả đã khảo sát đường cong biên độ tần số, từ đó thông tin

*Liên hệ tác giả: phamngocchung.humg.edu.vn

Nhận ngày 01/02/2024, sửa ngày 24/02/2024, chấp nhận đăng ngày 21/03/2024

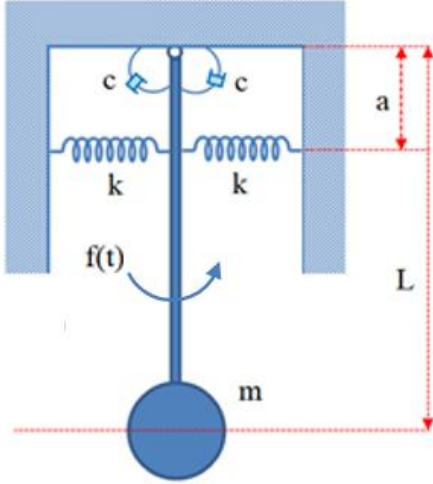
Link DOI: <https://doi.org/10.54772/jomc.02.2024.698>

thu được sẽ dùng vào việc đánh giá hệ số cản phục vụ mục đích tham chiếu trong thiết kế hệ con lắc.

2. Phương trình chuyển động có cản của hệ con lắc

Trong nghiên cứu này, ta xét một hệ con lắc như trên Hình 1. Con lắc gồm thanh cứng giả sử là khối lượng không đáng kể, có độ dài L , mang vật nặng có khối lượng m tại đầu dưới cùng của thanh; hai lò xo độ cứng k gắn vào thanh ở vị trí cách khớp trên cùng một khoảng a như Hình 1. Vật m chịu tác dụng của mô men $f(t)$ tuân theo quy luật điều hòa $f = f_0 \sin \nu t$. Phương trình dao động của hệ là:

$$mL^2 \ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + 2ka^2 \sin \varphi \cos \varphi + mgL \sin \varphi = f(t) \quad (1)$$



Hình 1. Mô hình của một hệ con lắc khối lượng có liên kết lò xo đàn hồi và cản tuyến tính.

Phương trình (9) được đưa về dạng sau:

$$\varphi'' + 2h\varphi' + \sin \varphi - \mu_0 \sin \varphi (1 - \cos \varphi) = q \sin \Omega \tau \quad (2)$$

trong đó ta đưa vào các đại lượng không thứ nguyên:

$$\tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2ka^2}{mL^2} + \frac{g}{L}}, \quad (3)$$

$$h = \frac{1}{2} \frac{c}{mL^2 \omega_0}, \quad \mu_0 = \frac{ka^2}{mL^2 \omega_0^2}, \quad q = \frac{f_0}{\omega_0^2}, \quad \Omega = \frac{\nu}{\omega_0}.$$

Ở đây, dấu phẩy ký hiệu đạo hàm theo biến thời gian mới không thứ nguyên τ .

Phương trình (2) có dạng phi tuyến vì chứa các hàm lượng giác của góc lệch φ . Ta sẽ xấp xỉ các hàm lượng giác bằng các đa thức để đưa phương trình (2) về dạng phi tuyến dễ xử lý hơn. Trước tiên, ta khai triển hàm $\sin \varphi$, $\sin 2\varphi$ dưới dạng chuỗi Taylor trong lân cận điểm cân bằng $\varphi = 0$ và chỉ giữ lại các số hạng đến xấp xỉ bậc ba:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \text{HOH}, \quad (4)$$

$$\sin 2\varphi = 2\varphi - \frac{(2\varphi)^3}{6} + \text{HOH} = 2\varphi - \frac{4\varphi^3}{3} + \text{HOH},$$

trong đó HOH (Higher-Order Harmonics) là số hạng điều hòa bậc cao hơn ba. Sử dụng (4), phương trình (2) đưa về dạng đơn giản hơn sau đây:

$$\varphi'' + 2h\varphi' + \varphi - \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu_0}{2} \right) \varphi^3 = q \sin \Omega \tau. \quad (5)$$

Có thể thấy rằng phương trình (5) có thành phần phi tuyến bậc ba giống như hệ Duffing nhưng hệ số của φ^3 mang dấu âm. Trong nghiên cứu này, các tác giả sử dụng phương pháp cân bằng điều hòa để tìm nghiệm xấp xỉ của (5) thay vì phương trình phi tuyến ban đầu (2).

3. Nghiệm xấp xỉ của phương trình dao động

Giả sử ta tìm nghiệm xấp xỉ của (5) dưới dạng bình ổn với dao động có cùng tần số với thành phần cưỡng bức $q \sin \Omega \tau$:

$$\varphi = A \sin(\Omega \tau + \psi_0), \quad (6)$$

trong đó A là biên độ dao động, ψ_0 là góc lệch của pha dao động là hai đại lượng cần tìm. Trong xấp xỉ (6) ta dừng lại ở xấp xỉ điều hòa bậc nhất, do đó trong các tính toán sau này các thành phần điều hòa từ bậc hai trở đi đều được bỏ qua. Để tìm nghiệm chính xác hơn thì các thành phần điều hòa bậc cao nên được tính đến; tuy nhiên sẽ chưa xét đến trong nghiên cứu này.

Thay biểu thức nghiệm (6) vào phương trình (5) và cân bằng các số hạng điều hòa tương ứng, ta được:

$$\left[(1 - \Omega^2)A - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu_0}{2} \right) A^3 \right] \cos \psi_0 - 2h\Omega A \sin \psi_0 = q, \quad (7)$$

$$2h\Omega A \cos \psi_0 + \left[(1 - \Omega^2)A - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu_0}{2} \right) A^3 \right] \sin \psi_0 = 0.$$

Coi hệ (7) là hệ của hai biến $\cos \psi_0$, $\sin \psi_0$, giải ra ta được:

$$\cos \psi_0 = \frac{(1 - \Omega^2)A - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu_0}{2} \right) A^3}{\left[(1 - \Omega^2)A - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu_0}{2} \right) A^3 \right]^2 + (2h\Omega A)^2} q \quad (8)$$

$$\sin \psi_0 = - \frac{2h\Omega A}{\left[(1 - \Omega^2)A - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu_0}{2} \right) A^3 \right]^2 + (2h\Omega A)^2} q.$$

Sử dụng đồng nhất thức lượng giác $\cos^2 \psi_0 + \sin^2 \psi_0 = 1$ và kết quả (8), ta thu được phương trình sau của biên độ A :

$$\left[(1-\Omega^2)A - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu_0}{2} \right) A^3 \right]^2 + (2h\Omega A)^2 = q^2. \quad (9)$$

Đặt biến mới $y = A^2 > 0$, phương trình (9) được đưa về dạng phương trình đại số bậc ba của biến y :

$$r_3 y^3 + r_2 y^2 + r_1 y + r_0 = 0 \quad (10)$$

trong đó các hệ số được biểu diễn như sau:

$$r_3 = \frac{9}{16} \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu_0}{2} \right)^2, \quad r_2 = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu_0}{2} \right) (1-\Omega^2), \quad (11)$$

$$r_1 = \left[(1-\Omega^2)^2 + (2h\Omega)^2 \right], \quad r_0 = -q^2.$$

Giải hệ (10) bằng công thức nghiệm của phương trình bậc ba ta thu được biên độ A của đáp ứng:

$$A = A(h, \mu_0, q, \Omega). \quad (12)$$

Góc pha ban đầu ψ_0 được xác định theo công thức:

$$\psi_0 = \tan^{-1} \left[-\frac{2h\Omega}{(1-\Omega^2) - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu_0}{2} \right) A^2} \right]. \quad (13)$$

Chú ý rằng, trong trường hợp tuyến tính, đường cong biên độ $A = A_L$ phụ thuộc vào tần số Ω như sau:

$$A = A_L = \frac{b}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2h\Omega)^2}}. \quad (14)$$

Trong mục 4, đáp ứng hệ thu được từ phương pháp cân bằng điều hòa, các đặc trưng của đường cong biên độ - tần số sẽ được phân tích chi tiết.

4. Kết quả số và thảo luận

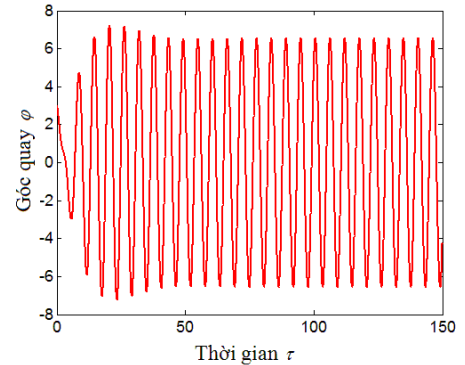
Các kết quả tính toán số cho phân tích hệ được minh họa trên các Hình 2-14. Các tham số hệ dùng để tính toán được cho trong Bảng 1.

Bảng 1. Các tham số sử dụng trong tính toán đáp ứng hệ.

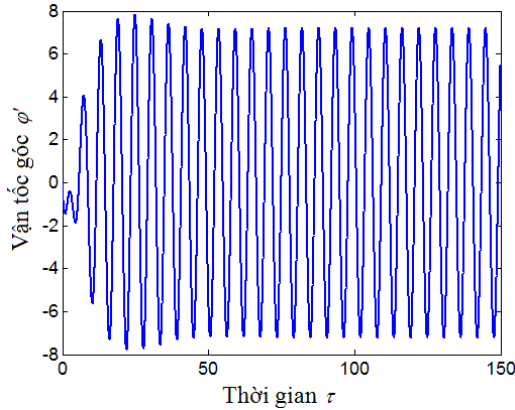
Tham số	Ký hiệu	Giá trị
Hệ số cản	h	0.1
Tham số phi tuyến	μ_0	0.01
Biên độ kích động	b	3 (deg)
Tần số kích động	Ω	1.1

4.1 Phân tích đáp ứng tiến triển theo thời gian

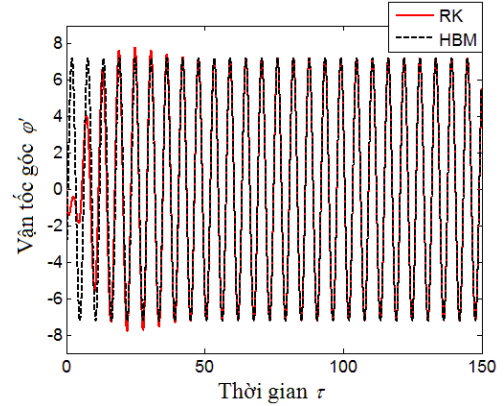
Hình 2 và 3 biểu diễn đáp ứng hệ cho hệ phi tuyến (5) sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 với điều kiện đầu được chọn $\varphi(0) = 2$ (deg), $\varphi'(0) = 0$. Kết quả cho thấy rằng sau khoảng thời gian không thứ nguyên $\tau = 50$ đáp ứng góc lệch φ và vận tốc góc φ' của hệ phi tuyến (5) đi vào trạng thái bình ổn với nghiệm gần như tuần hoàn. Hình 4 mô tả quỹ đạo pha của đáp ứng hệ. Hình vẽ này cho ta thấy xuất hiện vòng giới hạn dạng gần tròn khi thời gian không thứ nguyên τ đủ lớn. Góc lớn nhất ở trạng thái bình ổn là nhỏ hơn 10 (deg).



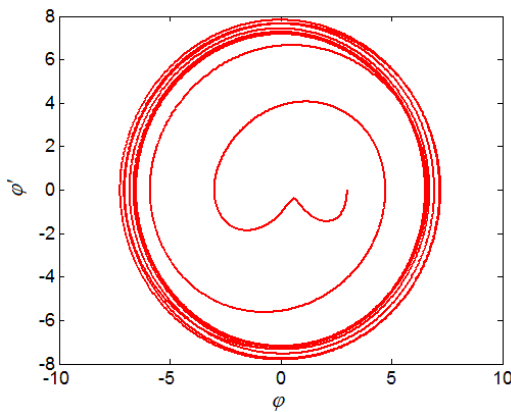
Hình 2. Diễn tiến góc lệch theo thời gian.



Hình 3. Diễn tiến vận tốc góc theo thời gian.

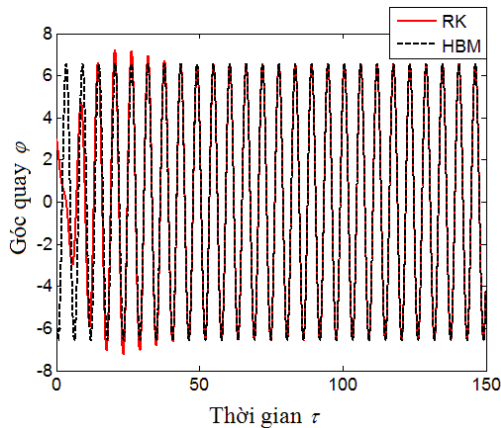


Hình 6. Diễn tiến vận tốc góc quay theo thời gian với các phương pháp khác nhau.



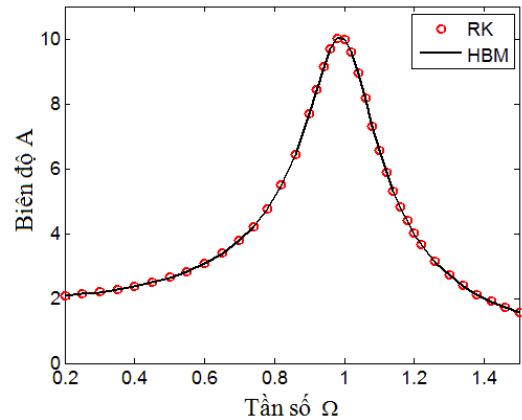
Hình 4. Góc quay φ trên mặt phẳng pha (φ, φ').

Từ tham số cho trong Bảng 1, ta có thể tính được các hệ số của phương trình bậc ba (10) từ đó tìm được nghiệm số của biên độ A và góc lệch pha ψ_0 từ phương trình (8). Thay hai đại lượng tìm được này vào nghiệm xấp xỉ (6) ta thu được dạng biểu diễn số trong đồ thị trên Hình 5 và 6.



Hình 5. Diễn tiến góc quay theo thời gian với các phương pháp khác nhau.

Hình 5 và 6 so sánh đồ thị diễn tiến của góc quay φ và vận tốc góc φ' với hai cách tiếp cận khác nhau: phương pháp Runge-Kutta (RK) và phương pháp cân bằng điều hòa (HBM). Quan sát thấy rằng đồ thị của góc quay và vận tốc góc thu được từ phương pháp HBM là khá gần với kết quả thu được từ phương pháp mô phỏng số Runge-Kutta. Điều đó cho thấy mức độ chính xác của phương pháp cân bằng điều hòa mặc dù mới chỉ lấy đến xấp xỉ điều hòa bậc nhất.

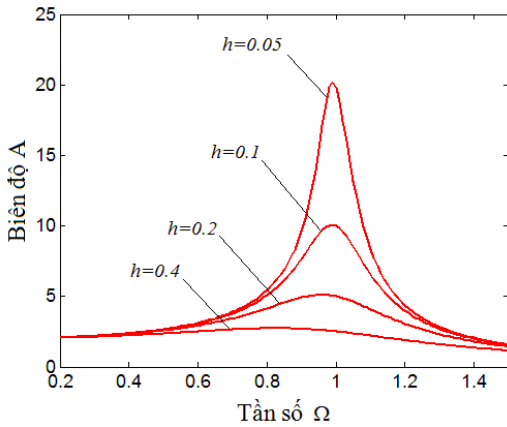


Hình 7. Đường cong biên độ tần số thu được từ phương pháp RK và phương pháp HBM.

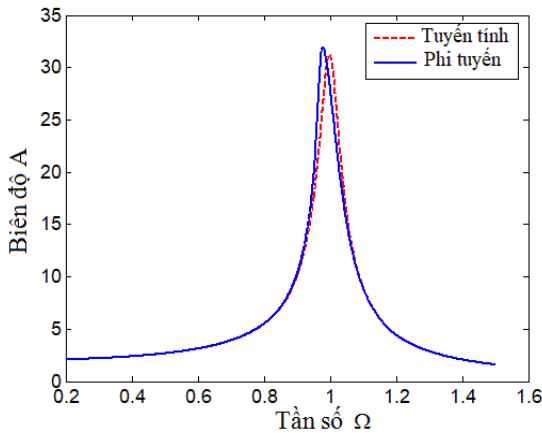
4.2. Đường cong biên độ - tần số trong trường hợp hệ phi tuyến yếu

Ta xét trường hợp hệ dao động là phi tuyến yếu với hệ số phi tuyến μ_0 được lấy là $\mu_0 = 0,01$. Lúc này hệ số của phần tử bậc ba của φ trong phương trình (5) là $1/6 + 0,01/2 = 0,1717$. Lưu ý rằng với xấp xỉ góc nhỏ hơn 10 (deg) thì hệ phi tuyến gốc ban đầu (2) có thể xấp xỉ bằng một hệ tuyến tính tương ứng. Đặc tính phi tuyến của hệ tăng dần nếu góc lệch φ tăng nhưng không quá lớn để xấp xỉ (4) vẫn còn hiệu quả. Giá trị của φ phụ thuộc vào một tham số hệ quan trọng là giá trị của cản h . Kết quả trên Hình 5 cho thấy biên độ ở trạng thái bình ổn không vượt qua 10 (deg) ứng với $h = 0,1$. Trên Hình 7 minh

họa đường cong biên độ - tần số của dao động con lắc với $h = 0.1$. Tần số được lấy trên miền $[0.2, 1.5]$. Sự khớp nhau về số liệu biên độ của phương pháp cân bằng điều hòa với phương pháp Runge-Kutta một lần nữa cho thấy phương pháp cân bằng điều hòa là một công cụ mạnh để dự báo đáp ứng của hệ với độ chính xác nhất định.



Hình 8. Đường cong biên độ tần số thu được từ phương pháp HBM với hệ số cản khác nhau.



Hình 9. So sánh đường cong biên độ - tần số trong trường hợp tuyến tính và phi tuyến với cản $h = 0.032$

Với các tham số đang xét, có thể thấy rằng giá trị cản $h = 0.1$ được xem là đủ lớn để biên độ dao động vẫn nằm trong vùng xấp xỉ tuyến tính. Tuy nhiên khi cản h nhỏ hơn nữa thì biên độ dao động có thể tăng và đặc tính phi tuyến sẽ được thể hiện rõ ràng hơn. Điều này được minh họa trên Hình 8 và 9 cho đường cong biên độ - tần số với các giá trị cản khác nhau. Nếu lấy cản $h = 0.05$ thì biên độ dao động lên tới xấp xỉ 20 (deg). Nếu lấy h nhỏ hơn nữa thì biên độ cao hơn 20 (deg) và đường cong biên độ tần số có xu hướng lệch về phía có tần số nhỏ hơn, trong khi đó đường cong biên độ - tần số của hệ tuyến tính thì cân xứng với nhau ở hai bên tần số cộng hưởng $\Omega = 1$ như trên Hình 9.

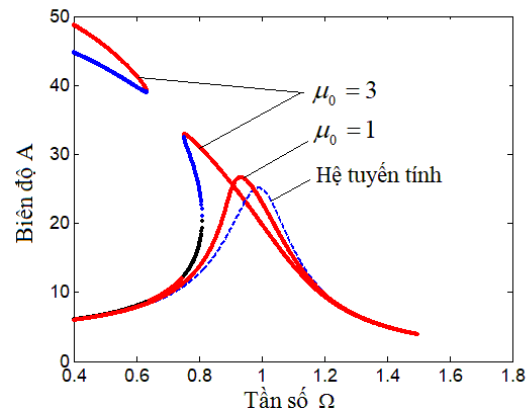
4.3. Dáng điệu đường cong biên độ - tần số trong trường hợp hệ phi tuyến mạnh

Bây giờ ta xét một nhân tố gây ra tính phi tuyến mạnh của hệ là hệ số phi tuyến μ_0 . Hai giá trị minh họa được lấy là $\mu_0 = 1$ và $\mu_0 = 3$ với kết quả số được thể hiện trên Hình 10 cho đường cong biên độ - tần số. Với $\mu_0 = 1$, đường cong biên độ nghiêng hẳn về phía bên trái có tần số thấp hơn. Đường cong có biến đổi rõ rệt khi lấy $\mu_0 = 3$ với việc xuất hiện hai nhánh khác nhau:

(i) Nhánh thứ nhất xuất hiện trong miền tần số thấp, trong khi đó nhánh thứ hai xuất hiện trên cả dải tần số đang xét. Tuy nhiên dao động ở nhánh thứ nhất là không ổn định, biên độ dao động nhanh chóng rơi xuống nhánh thứ hai.

(ii) Một đặc điểm có thể quan sát nữa là ngay cả trên nhánh thứ hai cũng tồn tại sự rơi biên độ, tức là có sự nhảy về độ lớn của biên độ khi trạng thái hệ đang ở đỉnh của nhánh này rơi xuống biên độ nhỏ hơn có cùng tần số.

Đặc điểm (i) là một dấu hiệu mới quan sát được khi xét hệ số của thành phần phi tuyến bậc ba của hệ có giá trị âm. Trong phương trình (5), dấu của thành phần bậc nhất là ngược trong khi dấu của thành phần bậc ba là âm sẽ cho tính chất rẽ nhánh về biên độ dao động của hệ; và thực tế tồn tại hai nhánh khác nhau của đường cong biên độ - tần số. Đặc điểm (ii) giống như ứng xử biên độ của phương trình Duffing thông thường với hệ số cản bậc ba ngược nhưng đường cong ngả về bên trái thay vì bên phải như thông thường.



Hình 10. Đồ thị đường cong biên độ tần số với $\mu_0 = 1, \mu_0 = 3$ và trường hợp hệ tuyến tính ($b = 5$)

4.4 Thiết kế hệ số cản

Trong thực tế thiết kế hệ cho mục đích nhất định, người ta sẽ không chế góc lệch φ trong miền giới hạn nhất định. Ta ký hiệu A_d là biên độ thiết kế, khi đó ta có ràng buộc biên độ $0 < A \leq A_d$. Từ đó đòi hỏi cần thiết kế hệ số cản h để biên độ dao động có thể nằm trong miền này đảm bảo tính toàn vẹn của kết cấu hệ. Ta gọi miền của h mà đáp ứng biên độ của hệ thỏa mãn $0 < A \leq A_d$ là *miền hữu hiệu H*. Trong nghiên cứu này, biên độ thiết kế được lấy giả sử trong miền $[10, 30]$ (deg), khi đó hệ số cản tìm được sẽ có giá trị trong miền hữu hiệu H như trên Hình 11. Giá trị $\mu_0 = 0.01$ được lấy trong mô phỏng. Nếu lấy

ngưỡng $A_d = 10$ (deg) thì cận dưới của hệ số cản tìm được vào khoảng 0.1, trong khi đó nếu lấy ngưỡng $A_d = 30$ (deg) cận dưới của hệ số cản thiết kế tìm được vào khoảng 0.032. Chú ý rằng giá trị hệ số cản thiết kế h tìm được phải đảm bảo biên độ dao động của hệ luôn nhỏ hơn A_d trên toàn miền tần số [0.2, 1.5].

Để rõ hơn ý nghĩa của miền hữu hiệu **H**, ta xét trường hợp hệ là tuyến tính. Từ (14), đường cong biên độ tần số đạt giá trị lớn nhất tại tần số cộng hưởng $\Omega = 1$, và do đó giá trị đỉnh A_{max} lớn nhất thu được là:

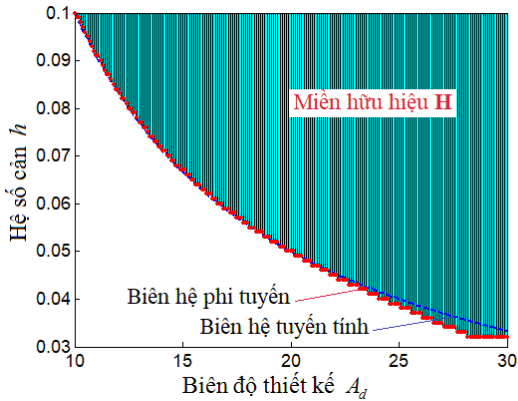
$$A_{max} = \frac{b}{2h}. \tag{15}$$

Ta đòi hỏi rằng $A_{max} \leq A_d$ dẫn đến ràng buộc của cản h là:

$$h \geq \frac{b}{2A_d}. \tag{16}$$

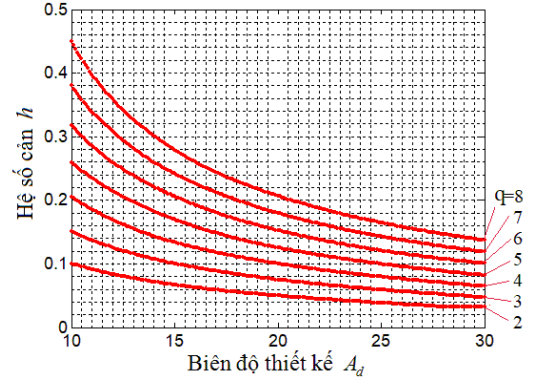
Như vậy, nếu xấp xỉ tuyến tính được chấp nhận, cần thiết kế hệ số số cản h sao cho giá trị của h luôn nằm trên đường cong $h = b / (2A_d)$ trong hệ trục tọa độ $(A_d - h)$.

Trên Hình 11, so sánh trường hợp hệ tuyến tính và phi tuyến có thể thấy rằng miền hữu hiệu **H** là gần như trùng khớp nhau ở miền biên độ dao động nhỏ, trong khi ở miền biên độ dao động lớn gần 30 (deg) có sai khác đôi chút do hiệu ứng phi tuyến thể hiện rõ ràng hơn trong miền này. Tuy nhiên tính chất phi tuyến ở đây là phi tuyến yếu do ta đang lấy $\mu_0 = 0.01$ khá nhỏ.

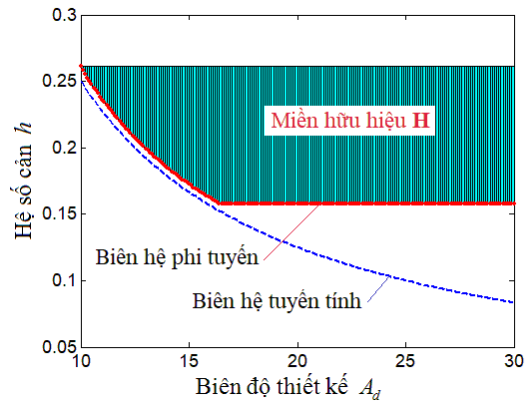


Hình 11. Hệ số cản thiết kế.

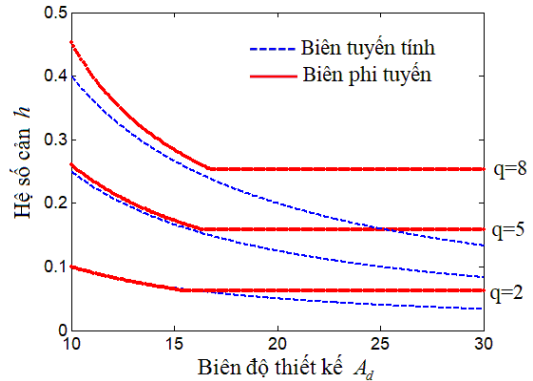
Hình 12 là lưới hệ số cản thiết kế h với các giá trị khác nhau của biên độ kích động ngoài q . Giá trị của q được lấy là {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} (deg). Rõ ràng khi biên độ kích động ngoài cao thì đòi hỏi thiết kế h có đường biên của miền hữu hiệu **H** càng lớn hơn; điều đó có nghĩa miền hữu hiệu **H** ngày càng bị thu hẹp nếu kích động ngoài là lớn.



Hình 12. Lưới hệ số cản thay đổi với các giá trị biên độ kích động ngoài khác nhau.



Hình 13. Miền hữu hiệu của hệ số cản trong trường hợp phi tuyến mạnh.



Hình 14. Dáng điệu biên của miền hữu hiệu trong trường hợp phi tuyến mạnh với các giá trị biên độ khác nhau của lực kích động.

Hình 13 minh họa miền hữu hiệu trong trường hợp hệ là phi tuyến mạnh. Biên của miền hữu hiệu của hệ phi tuyến và hệ tuyến tính có sự khác nhau rõ rệt khi tính phi tuyến của hệ tăng lên. Trong trường hợp biên độ kích động ngoài $q=2$ (deg), đây là được xem là biên độ kích động nhỏ nhỏ; trong miền biên độ thiết kế [10, 15] (deg) biên hữu hiệu của hệ phi tuyến và tuyến tính là gần như nhau và có hiệu ứng tương tự như tính chất phi tuyến yếu trên Hình 11. Cũng với $q=2$ (deg), nhưng trên miền [15, 30] (deg) thì đáp ứng của hệ thể hiện đặc

tính phi tuyến rõ rệt; thiết kế cần cho hệ phi tuyến lúc này là rất khác so với thiết kế cần cho hệ tuyến tính. Khi tăng $q=5$ và $q=8$, trên Hình 14 ta cũng có nhận định tương tự trên miền [15, 30] của biên độ thiết kế. Có thể thấy đóng góp của biên độ kích động ngoài lên đặc điểm phi tuyến của hệ là đáng kể, do đó miền hữu hiệu cho thiết kế cần sẽ trở nên hẹp hơn so với hệ tuyến tính.

5. Kết luận

Hệ con lắc có ứng dụng rộng rãi trong nhiều chi tiết khác nhau của các hệ kỹ thuật. Nghiên cứu dao động phi tuyến của hệ này có ý nghĩa rất lớn trong các bài toán thiết kế để đạt được sự tối ưu về phạm vi hình học cũng như hoạt động của thiết bị. Trong nghiên cứu này, tác giả đã khảo sát dao động phi tuyến trong một hệ con lắc – lò xo – khối lượng với phạm vi hoạt động hạn chế của góc dao động của con lắc. Đầu tiên đáp ứng hệ được nghiên cứu bằng phương pháp giải tích thông qua cách tiếp cận cân bằng điều hòa. Cả tính chất phi tuyến yếu và mạnh của hệ đều được khảo sát. Các tác giả chỉ ra đặc điểm về sự chuyển dịch của đồ thị đường cong biên độ - tần số về phía có tần số nhỏ hơn và tính chất rẽ nhánh của đồ thị này khi tính chất phi tuyến mạnh của hệ được thể hiện. Ứng xử này khác với ứng xử của hệ Duffing thông thường có các hệ số của phần tuyến tính và phi tuyến đều mang dấu dương. Đây là đặc điểm mới tìm được từ nghiên cứu mà ở đó hệ số của thành phần phi tuyến là âm trong khi hệ số của thành phần tuyến tính là dương.

Từ tính chất định tính và định lượng tìm được của đồ thị đường

cong biên độ tần số, tác giả đề xuất khái niệm *miền hữu hiệu H* để chỉ ra miền thiết kế của hệ số cần của hệ nhằm đảm bảo biên độ dao động của hệ không vượt quá giới hạn thiết kế cho phép. Giới hạn thiết kế này xuất phát từ đặc điểm hình học của thiết bị với không gian hoạt động bên trong là hạn chế. Miền hữu hiệu **H** trong trường hợp hệ là tuyến tính cũng được chỉ ra. Một lưới các đường cong thiết kế của hệ số cần được phác thảo làm một tham chiếu hữu ích cho các kỹ sư thiết kế.

Tài liệu tham khảo

- [1]. Scott M.W., Lewis C.M., China: *Its History and Culture*. New York: McGraw-Hill, Inc., (2005)
- [2]. Setareh M., Ritchey J.K., Baxter A.J., Murray T.M., Pendulum Tuned Mass Dampers for Floor Vibration Control, *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 20, 64-73, (2006). DOI: 10.1061/(ASCE)0887-3828(2006)20:1(64)
- [3]. Troy S., Chaos in a double pendulum, *American Journal of Physics*, 60, 491-499 (1992), DOI: 10.1119/1.16860
- [4]. Mickens R.E., *Oscillations in Planar Dynamics Systems* (Singapore: World Scientific), 1996.
- [5]. Marion J.B., *Classical Dynamics of Particles and Systems* (San Diego, CA: Harcourt Brace Jovanovich), 1970.
- [6]. Beléndez A., Hernández A., Márquez A., Beléndez T., Neipp C., Analytical approximations for the period of a nonlinear pendulum, *European Journal of Physics*, 27, 539-551 (2006).
- [7]. Cadwell L.H., Linearization of the simple pendulum, *American Journal of Physics*, 59, 979-981, (1991)