

MÔ HÌNH ĐỘNG LỰC HỌC CỦA HỆ THU THẬP NĂNG LƯỢNG SỬ DỤNG DẦM CÓ HAI VỊ TRÍ CÂN BẰNG

Nguyễn Huy Thế¹

¹Trường Đại học Thủy lợi

Nhận ngày 06/05/2021, thẩm định ngày 13/5/2021, chỉnh sửa ngày 28/05/2021, chấp nhận đăng 22/06/2021

Tóm tắt

Trong những năm gần đây, hệ thu thập năng lượng phi tuyến sử dụng dầm đàn hồi có dán vật liệu áp điện và hai nam châm được đặt gần đầu tự do của dầm rất được quan tâm nghiên cứu. Phương pháp phổ biến nhất để mô hình hóa hệ thống này là rời rạc hóa dầm đàn hồi theo không gian với một hàm dạng và giả sử lực đàn hồi do từ trường gây ra có dạng đa thức bậc ba. Hai nam châm được định vị sao cho hệ tồn tại hai vị trí cân bằng ổn định và một vị trí cân bằng không ổn định. Phương pháp mô hình hóa này dẫn đến một phương trình Duffing với hệ số đàn hồi tuyến tính âm và hệ số đàn hồi bậc ba dương. Mặc dù mô hình này có thể mô tả được tính chất lưỡng cực ổn định nêu trên, tính đầy đủ của các giả thuyết chưa được kiểm chứng kỹ lưỡng. Bài báo này trình bày kết quả của các nghiên cứu thực nghiệm về tính đầy đủ của phương trình Duffing mô tả hệ cơ học gồm dầm đàn hồi và nam châm, trong đó dầm không mang vật liệu áp điện với mục đích đơn giản hóa quá trình tính toán. Do đó, một mô hình đã được phát triển để xác định lực đàn hồi bậc ba của hệ. Kết quả tính toán lý thuyết về đáp ứng động lực học của mô hình Duffing với các kích động điều hòa được so sánh với thực nghiệm. Các kết quả nói chung rất phù hợp, tuy nhiên mô hình còn hạn chế như các nghiệm của mô hình dịch đến tần số cao hơn so với thực nghiệm.

Từ khóa: *động lực học phi tuyến, thu thập năng lượng, dầm có hai vị trí cân bằng, phương trình Duffing, lực đàn hồi bậc ba.*

Abstract

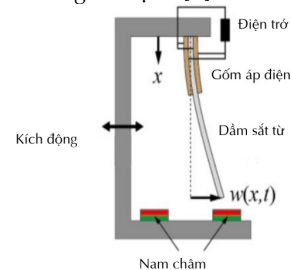
In recent years, a nonlinear energy harvesting system using piezo cantilever beam with two magnets placed near the free end of the beam is of great research interest. The most common method for modeling this system is to discretize spatially the beam with only one ansatz function and to assume a cubic elastic force caused by the magnetic field. The magnets are positioned so that the system exists two stable equilibrium positions and an unstable one. This modeling method resulted in a Duffing equation with a negative linear elastic term and a positive cubic restoring term. Although this model can describe the above bistability, its sufficiency of the assumptions has not been thoroughly verified. This paper presents the experimental results on the sufficiency of the Duffing equation describing a mechanical system consisting of elastic beams and magnets, without piezos for the purpose of simplification. Therefore, a model was developed to determine the cubic restoring force of the system. The theoretical results on the dynamic response of the Duffing model with the harmonic excitations were compared with the experiments. The results are generally in good agreement, but limitations of the model are still observed, as the solutions of the model shift to higher frequencies compared to the experiments.

Keywords: *nonlinear dynamics, energy harvesting, bistable beam, Duffing equation, cubic restoring force.*

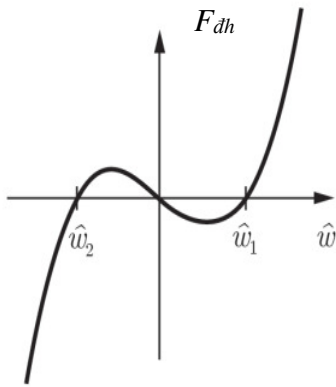
1. Giới thiệu chung

Hệ thu thập năng lượng nói chung được sử dụng để thu hồi các phần năng lượng nhỏ từ môi trường mà thông thường là năng lượng mất mát. Trong đó, các hệ thu thập năng lượng dao động nhận dao động từ môi trường để tạo ra năng lượng điện [1, 2]. Một phương pháp phổ biến để biến đổi năng lượng cơ học thành năng lượng điện là sử dụng gốm áp điện dán trên kết cấu chịu biến dạng. Đã có nhiều công trình nghiên cứu về ứng xử cũng như các phương pháp nâng cao hiệu suất của hệ dao động đó [3, 4]. Trong [5], do bản chất ngẫu nhiên hoặc có dải tần số rộng của các dao động trong thực tế, các phương pháp tính toán đã được đưa ra khác biệt so với trường hợp kích động đơn tần của hệ tuyến tính cho trước [6]. Trong hình 1 là mô hình hệ thu thập năng lượng phi tuyến sử dụng gốm áp điện, bao gồm khung dao động và một dầm sắt từ chịu uốn trên đó có gắn tấm áp điện. Như vậy, dầm được ngâm trên kết cấu chuyển động đóng vai trò kích động động học của hệ. Đặc trưng của hệ thu thập năng

lượng này là ứng xử phi tuyến do các nam châm được đặt gần đầu tự do của dầm. Hình 2 biểu diễn lực đàn hồi phi tuyến với ba vị trí cân bằng ứng với giá trị lực triệt tiêu, trong đó chỉ có hai vị trí cân bằng ứng với chuyển vị khác không của đầu dầm tự do là ổn định. Nhờ tính chất phi tuyến, hệ hoạt động hiệu quả hơn so với hệ tuyến tính tương ứng khi kích động đa tần phân bố xung quanh tần số cơ bản của hệ và khi hệ dao động quanh hai vị trí cân bằng ổn định [7].



Hình 1. Hệ thu thập năng lượng dao động.



Hình 2. Lực đàn hồi phi tuyến với hai vị trí cân bằng ổn định và một vị trí cân bằng không ổn định.

Để mô hình hóa hệ thu thập năng lượng này, ta xét hệ thành ba bộ phận gồm dầm chịu uốn, lực đàn hồi do từ trường gây ra bởi nam châm và phần điện gồm gồm áp điện và mạch điện. Để đơn giản hóa khi tập trung khảo sát lực đàn hồi phi tuyến của nam châm, chỉ xét hệ không có phần điện. Bộ phận chính của hệ cơ học là dầm đàn hồi được xem là dầm Euler-Bernoulli. Dầm được rời rạc hóa sử dụng dạng riêng đầu tiên khi không có nam châm, từ đó có thể mô tả ứng xử động lực học của hệ bằng một phương trình vi phân thường bậc hai [7]. Việc sử dụng dạng riêng tuyến tính đầu tiên của dầm là đủ để mô hình hóa hệ trong hầu hết các trường hợp, dạng riêng thứ hai tham gia rất ít vào dao động trong trường hợp đáp ứng siêu điều hòa [8]. Tác dụng của các nam châm có thể coi như lực tập trung đặt tại đầu tự do của dầm và được giả thiết có dạng đa thức bậc ba không chứa số hạng bậc hai. Mô hình này có thể mô tả tính chất lưỡng cực ổn định nhờ phương trình Duffing với lực đàn hồi tuyến tính âm và lực đàn hồi bậc ba dương. Một số biến thể của hệ với cách đặt nam châm khác hoặc hiệu ứng phi tuyến khác cũng đều dẫn đến phương trình Duffing. Các tham số của mô hình được xác định từ thực nghiệm hoặc đưa vào các giả thiết. Vị trí cân bằng ổn định của hệ và tần số dao động riêng quanh vị trí đó cần được xác định. Phương pháp khác để mô hình hóa hệ là mô phỏng tác dụng của từ trường tuyến tính. Tuy nhiên, phương pháp này chỉ có kết quả tốt khi dầm dao động bé quanh vị trí cân bằng ổn định. Trong bài báo này, ứng xử bình ổn của hệ với các kích động điều hòa khác nhau sẽ được nghiên cứu và so sánh với kết quả thực nghiệm.

2. Mô hình hóa hệ cơ học

Dầm đàn hồi trong hệ cơ học ứng với hệ thu thập năng lượng có thể được mô hình hóa là dầm Euler-Bernoulli dao động uốn khi chịu kích động động học. Chuyển vị w của dầm được mô tả bởi phương trình vi phân đạo hàm riêng phụ thuộc tọa độ trên dầm x và thời gian t . Thực hiện rời rạc hóa dầm sử dụng dạng nghiệm Ritz

$$w(x,t)=W(x)p(t) \tag{1}$$

Trong đó, W là dạng riêng đầu tiên của dầm tuyến tính, $x \in (0, L)$ là tọa độ xác định vị trí trên dầm, L là chiều dài dầm và p là tọa độ suy rộng phụ thuộc thời gian. Chọn giá trị $W = 1$ tại $x =$

L , khi đó p biểu diễn dao động của đầu tự do của dầm $w(L, t)$. Từ đó, ta có phương trình vi phân chuyển động của hệ

$$\ddot{p}(t)+2D\omega p(t)-\alpha p(t)+\beta p^3(t)=g\ddot{z}_b(t) \tag{2}$$

Phương trình (2) biểu diễn dao động của chấn tử Duffing chịu kích động động học, trong đó hệ số g được xác định bởi

$$g=-\frac{\int_0^L W(x)dx}{\int_0^L W^2(x)dx} \tag{3}$$

và kích động động học là kích động điều hòa với biên độ không đổi $z_b(t) = A \cos \Omega t$. Để có lực đàn hồi phi tuyến dưới dạng $-\alpha p(t) + \beta p^3(t)$, lực từ được giả thiết là lực tập trung tác dụng tại đầu tự do của dầm và có dạng đa thức bậc ba. Hệ số cản tuyến tính D cũng được đưa vào phương trình. Khi các hệ số $\alpha, \beta > 0$, tồn tại hai vị trí cân bằng ổn định nằm về hai phía của vị trí dầm chưa biến dạng.

$$p_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tag{4}$$

Tần số dao động tự do ứng với dao động nhỏ xung quanh mỗi vị trí cân bằng có thể được xác định nhờ phương pháp tuyến tính hóa

$$\omega=\sqrt{2\alpha} \tag{5}$$

Các tham số của mô hình có thể xác định từ thực nghiệm. Tần số dao động tự do ω và hệ số cản D được xác định từ dao động tự do của dầm quanh mỗi vị trí cân bằng dưới tác dụng của từ trường nam châm. Các hệ số g, α, β được xác định từ phương trình (3), (4) và (5).

Thực hiện thí nghiệm với dầm thép công xôn 250 x 20 x 1 mm và hai nam châm vĩnh cửu 20 x 10 x 5 mm có từ dư bão hòa $B_r = 1,35T$ thu được các tham số của hệ cơ học như trong Bảng 1. Sự khác biệt giữa các giá trị tham số ứng với mỗi vị trí cân bằng ổn định là không thể tránh khỏi do luôn có sự không đối xứng khi thiết lập thí nghiệm. Do đó, ta sử dụng giá trị trung bình của các tham số ω và D khi đưa vào phương trình (2). Các tham số của mô hình cho trong Bảng 2.

Bảng 1. Tham số của hệ cơ học.

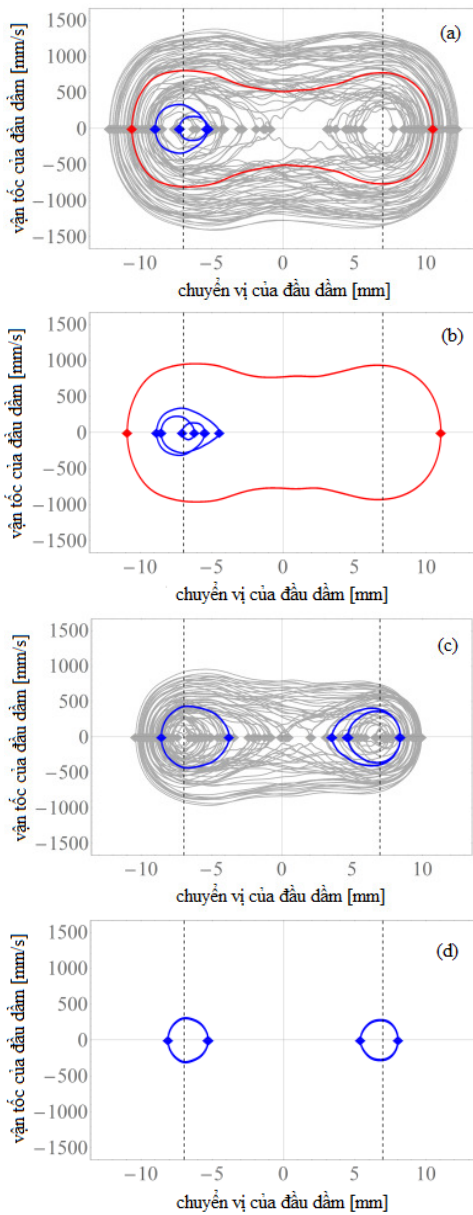
Tham số	Ký hiệu	Giá trị	Đơn vị
Tần số riêng của dầm (không có nam châm)	ω_0	$2\pi.13,4$	s^{-1}
Vị trí cân bằng ổn định	$\hat{w}_{1,2}$	$\pm 6,97$	mm
Tần số dao động tự do ứng với dao động nhỏ quanh mỗi vị trí cân bằng ổn định	$\omega_{1,2}$	$2\pi.14,9$ $2\pi.14,6$	s^{-1}
Hệ số cản ứng với dao động nhỏ quanh mỗi vị trí cân bằng ổn định	$D_{1,2}$	0,013 0,019	

Bảng 2. Tham số của mô hình.

Tham số	$\omega(s^{-1})$	D	$\alpha(s^{-2})$	$\beta(s^{-2})$	$g(m^{-2})$
Giá trị	92,7	0,016	4275,6	$8,8 \times 10^7$	-1,57

Để so sánh kết quả thực nghiệm với mô hình Duffing cho bởi phương trình (2), hệ cơ học ứng với hệ thu thập năng lượng được kích động động học với tần số khác nhau. Hình 3 biểu diễn

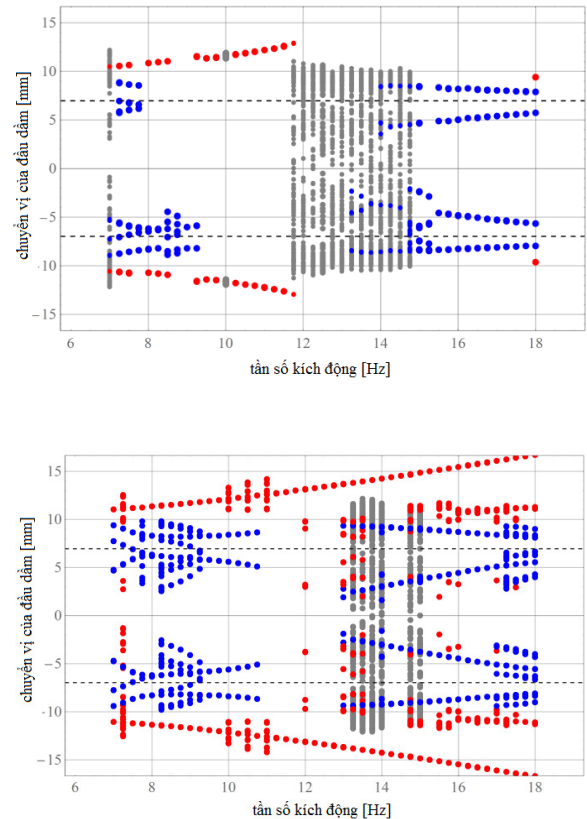
quỹ đạo pha của nghiệm, tức là quan hệ giữa vận tốc và chuyển vị tại đầu tự do của dầm. Do hệ có tính chất phi tuyến nên dao động của hệ phụ thuộc điều kiện đầu, nghĩa là với cùng kích động có thể xuất hiện các nghiệm khác nhau. Để phân biệt các dạng nghiệm, xét các điểm đảo chiều chuyển động của đầu dầm trong miền thời gian, là các điểm được đánh dấu trong Hình 3. Khi vận tốc đổi dấu, dầm bắt đầu đảo chiều chuyển động. Nếu tất cả các điểm đảo chiều ứng với chuyển vị cùng dấu, dầm dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng ổn định. Trường hợp giá trị chuyển vị ứng với các điểm đảo chiều đổi dấu theo chu kỳ hữu hạn, dầm dao động bao trùm hai vị trí cân bằng ổn định. Nếu tồn tại quá nhiều điểm đảo chiều ứng với dấu dương và âm, dầm dao động hỗn loạn.



Hình 3. Quỹ đạo pha của hệ chịu kích động điều hòa với biên độ $A = 3,81 \text{ m/s}^2$ và các tần số khác nhau (a) 7 Hz; (b) 8,5 Hz; (c) 14 Hz; (d) 17 Hz.

Sự xuất hiện của các dạng nghiệm còn có thể được biểu diễn trên đồ thị đáp ứng tần số như trong Hình 4. Trong đó, tất cả các điểm đảo chiều tương ứng với các nghiệm dao động tồn tại đồng thời khi hệ chịu kích động điều hòa với cùng biên độ nhưng ở các tần số khác nhau. Trong một số dải tần số tồn tại đồng thời nhiều dạng nghiệm, nhưng cũng có dải tần số chỉ tồn tại duy nhất một dạng nghiệm. Cần lưu ý rằng, các điều kiện đầu ở mỗi thí nghiệm là không thể kiểm soát. Do đó, thí nghiệm phải được thực hiện với nhiều điều kiện đầu khác nhau làm tăng khả năng xuất hiện nhiều dạng nghiệm, để có thể so sánh kết quả thực nghiệm với kết quả tính toán số mô hình Duffing.

So sánh các kết quả trong Hình 4 ta thấy có sự tương đồng giữa thực nghiệm và mô phỏng số. Dải tần số đang xét được chia làm ba miền phân biệt: miền thứ nhất ứng với tần số thấp tồn tại đồng thời dao động nhỏ và dao động bao trùm, miền thứ hai chỉ tồn tại duy nhất dao động bao trùm, và miền thứ ba tồn tại đồng thời dao động nhỏ, dao động bao trùm và có thể cả dao động hỗn loạn. Sự khác biệt giữa kết quả thực nghiệm và mô phỏng số là các miền đó dịch về phía tần số cao. Như vậy, miền được quan tâm nhất là miền tần số thấp vì khả năng thu thập năng lượng tốt khi dầm dao động bao trùm với biên độ lớn. Một điểm khác nữa đó là dao động bao trùm có thể thực hiện ở tất cả các tần số khi mô phỏng nhưng rất khó đạt được trong thí nghiệm do sự sai khác về đặc tính kích động.



Hình 4. Các điểm đảo chiều ứng với các nghiệm dao động tồn tại đồng thời khi hệ chịu kích động điều hòa với biên độ $A=3,81 \text{ m/s}^2$ và các tần số khác nhau thu được từ thực nghiệm (trái) và mô phỏng số (phải).

3. Kết luận

Mô hình thu thập năng lượng sử dụng dầm một đầu ngàm có hai vị trí cân bằng đã được quan tâm nghiên cứu nhiều. Thông thường, lực đàn hồi của hệ thu thập năng lượng được giả thiết có dạng bậc ba. Khi đó dẫn đến phương trình Duffing mô tả tính lưỡng cực ổn định. Các tham số của mô hình sẽ được xác định từ thực nghiệm. Trong bài báo này, sự phù hợp của giả thiết về lực đàn hồi bậc ba phụ thuộc dao động của đầu dầm được kiểm chứng. Các kết quả thí nghiệm xác định đáp ứng của hệ với kích động học điều hòa khác nhau được so sánh với kết quả tích phân số mô hình Duffing tương ứng. Để giải quyết vấn đề khó kiểm soát điều kiện đầu trong thí nghiệm, các thí nghiệm và tính toán số với nhiều điều kiện đầu khác nhau được thực hiện để nâng cao khả năng xuất hiện các dạng nghiệm. Mặc dù không thể khẳng định có thể tìm thấy tất cả các nghiệm, các nghiệm tìm được trong thí nghiệm và mô phỏng khá phù hợp và có đặc điểm chung. Kết quả cho thấy mô hình tính toán có thể mô tả các tính chất thu được từ thực nghiệm. Tuy nhiên, trong kết quả tính toán vẫn có sự dịch chuyển miền nghiệm về phía tần số cao. Điều này có thể gây khó khăn trong bài toán tối ưu hóa hệ thu thập năng lượng chịu kích động điều hòa trong dải tần số cho trước. Tóm lại, đặc tính đàn hồi bậc ba có thể sử dụng tốt nếu yêu cầu về độ chính xác của mô hình không quá cao. Ngược lại cần sử dụng các xấp xỉ bậc cao hoặc mô hình phù hợp hơn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Priya, S., 2007, Advances in energy harvesting using low profile piezoelectric transducers, *Journal of Electroceramics*, 19, pp. 165-182.
- [2] Erturk, A. and Inman, D. J., 2011, *Piezoelectric Energy Harvesting*, John Wiley & Sons, Ltd.
- [3] Adhikari, S., Friswell M. I., and Inman, D. J., 2009, Piezoelectric energy harvesting from broadband random vibrations, *Smart Materials and Structures*, 18(11).
- [4] Erturk, A., Inman, D., 2009, A piezomagnetoelastic structure for broadband vibration energy harvesting, *Applied Physics letters*, 94, 254102.
- [5] Lentz, L., Nguyen, H. T., and von Wagner, U., 2017, Energy harvesting from bistable systems under random excitation, *Machine Dynamics Research*.
- [6] Wei, C. and Jing, X., 2017, A comprehensive review on vibration energy harvesting: Modelling and realization. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 74(November 2016):1–18.
- [7] De Paula, A. S., Inman D. J., and Savi, M. A., 2015, Energy harvesting in a nonlinear piezomagnetoelastic beam subjected to random excitation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 54:405–416.
- [8] Nguyễn Huy Thế, 2020, Mô hình rời rạc hóa dầm có hai vị trí cân bằng ứng dụng trong thu thập năng lượng. *Tạp chí Xây dựng*, 624(05/2020):170-172.