

Phân tích ứng xử của dầm trên nền đàn nhớt phi tuyến chịu hai tải trọng di động

Đoàn Kiều Văn Tâm^{1*}

¹ Khoa Kỹ thuật Và Công nghệ, Trường Đại học Quy Nhơn

TỪ KHOẢ

Dầm Timoshenko
Phi tuyến
Nền đàn nhớt
Tích phân số
Hai tải trọng di động

TÓM TẮT

Bài báo phân tích ứng xử động lực học của dầm Timoshenko nhịp đơn trên nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba. Tải trọng tập trung di động được xét hai lực di động với vận tốc không đổi. Nền được mô hình là nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba theo chuyển vị với sáu thông số nền độc lập. Phương pháp Galerkin trọng số kết hợp với phép cầu phương tích phân được áp dụng để biến đổi phương trình vi phân chuyển động chủ đạo thành hệ phương trình vi phân thường được giải bằng phương pháp tích phân từng bước trên toàn miền thời gian. Kết quả số cho thấy ảnh hưởng của các thông số nền, dầm, tải trọng đến tốc độ hội tụ của lời giải và phản ứng động của dầm.

KEYWORDS

Euler-Bernoulli beam
Nonlinear
Viscoelastic foundation
Numerical integration
Two concentrated moving loads

ABSTRACT

The paper studies a dynamic response of a Timoshenko beam resting on a third order nonlinear viscoelastic foundation. A single beam modeled as theory Timoshenko with a constant cross-section. The concentrated moving load is considered with two concentrated moving loads. The foundation is taken as a third order nonlinear viscoelastic foundation with six parameters. Therefore responses of third order nonlinear deflection, the effects at the same time of the shear deformable beams and the shear deformation of foundations are considered. The Galerkin method and considering integral quadrature method are utilized transforming differential governing equations of motion into the ordinary differential equations. The numerical integration method is used to solve differential equations and root of equations which is deflection of beam are determined. The numerical results show that dependence of the convergence rate of the Galerkin truncation and the vertical deflection of the beam on system parameters.

1. Giới thiệu

Bài toán phân tích ứng xử động lực học của dầm trên các loại nền khác nhau chịu tải trọng di động là một trong những vấn đề thu hút được nhiều sự quan tâm nghiên cứu trên toàn thế giới từ trước đến nay. Bài toán này giúp mô tả và dự đoán ứng xử cho nhiều kết cấu trong thực tế như kết cấu cầu, đường sắt, mặt đường sân bay, ống dẫn chất lỏng theo phương ngang... Mô hình kết cấu được sử dụng để phân tích ứng xử là một dầm trên nền đàn hồi chịu hai tải trọng di động. Mô hình đất nền được lựa chọn phụ thuộc vào tính chất cơ học của đất nền, sự tương tác trong thực tế giữa kết cấu và đất nền. Năm 1867, mô hình nền đàn hồi tuyến tính Winkler, đã tạo cơ sở tiền đề cho các bài toán nghiên cứu ứng xử của dầm trên nền ra đời, nổi bật như nghiên cứu của tác giả D.Thambiratnam, Y.Zhuge¹. Giới hạn của mô hình Winkler là không phản ánh được sự liên tục liên kết với nhau giữa các vùng đất nền lân cận nhau, nên chỉ áp dụng đối với môi trường đất rời. Nhược điểm này được khắc phục bởi một số mô hình nền đàn hồi tuyến tính hai thông số, nổi bật như mô hình nền Filonenko-Borodich, mô hình nền Hetenyi, mô hình nền Pasternak^{2,3}.

Các mô hình này đã thu hút sự quan tâm và có những đóng góp đáng kể vào kết quả của bài toán dầm trên nền đàn hồi chịu tải di động.

Cùng với sự phát triển mạnh mẽ của các công cụ hỗ trợ tính toán, mô hình nền với nhiều thông số độc lập mô tả ứng xử phi tuyến của nền trong quá trình tương tác với dầm, cho kết quả phân tích động lực học thu được nghiệm gần đúng hơn so với thực tế. Trong nghiên cứu của T.Dahlberg⁴, đã khẳng định điều này qua xem xét biến dạng của đường ray với lần lượt mô hình nền tuyến tính, mô hình nền phi tuyến và kết quả thí nghiệm trong thực tế. Nổi bật là các nghiên cứu của tác giả Younesian⁵, D.Younesian⁶, Ding⁷ sử dụng mô hình nền phi tuyến ba thông số xét đến tính cản nhớt của đất nền và phi tuyến bậc ba theo chuyển vị khi khảo sát bài toán động lực học kết cấu dầm chịu tải di động tương tác với nền nền. Tiếp theo với xu hướng này, bài báo này Phân tích ứng xử của dầm trên nền đàn nhớt chịu hai tải trọng di động sử dụng mô hình nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba với sáu thông số độc lập. Mô hình này phản ánh được mức độ phức tạp trong quá trình ứng xử thực tế của đất nền tương tác với dầm khi chịu hai tải trọng di động.

*Liên hệ tác giả: doankieuvantam@qnu.edu.vn

Nhận ngày 20/06/2024, sửa xong ngày 08/07/2024, chấp nhận đăng ngày 10/07/2024

Link DOI: <https://doi.org/10.54772/jomc.04.2024.757>

2. Phương trình chuyển động

2.1. Mô hình kết cấu

Mô hình kết cấu của hệ gồm dầm, nền, tải trọng được thể hiện như Hình 1. Dầm một nhịp, đồng nhất với tiết diện mặt cắt ngang không đổi $A(m^2)$, moment quán tính $I(m^4)$, chiều dài $L(m)$, khối lượng riêng $\rho(kg/m^3)$, modul đàn hồi $E(GPa)$, modul cắt $G(GPa)$ và vùng cắt hữu hiệu $k'A$. Dầm được mô tả theo lý thuyết dầm Timoshenko có kể đến lực cắt khi xét biến dạng, đặt trên nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba. Mô hình nền được mô tả như mô hình nền phi tuyến Pasternak với độ cứng là hàm tuyến tính, phi tuyến bậc ba theo chuyển vị và kể đến tính cản nhớt, được cho bởi biểu thức sau:

$$P_f(X, T) = k_1 U(X, T) + k_3 U^3(X, T) + \mu \frac{\partial U(X, T)}{\partial T} - G_p \frac{\partial^2 U(X, T)}{\partial X^2}$$

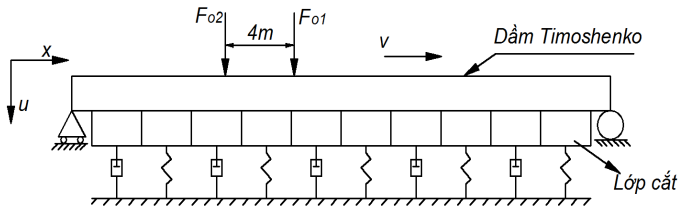
$$M_f(X, T) = k_f \psi(X, T) + c_f \frac{\partial \psi(X, T)}{\partial T} \quad (1)$$

trong đó: $P_f(N/m)$, $M_f(N)$ lực sinh ra mô men bởi đất nền trên một đơn vị chiều dài dầm, $k_1(N/m^2)$ thông số nền tuyến tính, $k_3(N/m^4)$ thông số nền phi tuyến, $G_p(N)$, $\mu(Ns/m^2)$ lần lượt là thông số cắt, hệ số cản của nền, $T(s)$ là đại lượng thời gian, $X(m)$ là tọa độ dọc theo trục dầm, $U(X, T)$ là hàm chuyển vị theo phương đứng, $\psi(X, T)$ là hàm chuyển vị xoay, thông số độ cứng $k_f(N)$ và thông số cản $c_f(Ns)$ của nền.

Trong mô hình kết cấu, hai tải trọng di động là lực tập trung có cùng vận tốc được mô tả như sau:

$$f(X, T) = F_{01} \delta(X - VT_1) + F_{02} \delta(X - VT_2) \quad (2)$$

trong đó: $\delta(X - VT)$ là hàm Dirac-Delta, $V(m/s)$ là vận tốc lực di động, $F_{01}(N)$, $F_{02}(N)$ là biên độ của lực di động.



Hình 1. Mô hình dầm Timoshenko trên nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba chịu tải trọng di động.

2.2. Thiết lập phương trình chuyển động

Sử dụng điều kiện cân bằng lực và lý thuyết dầm Timoshenko, hệ phương trình vi phân chuyển động chủ đạo của dầm được thiết lập như sau:

$$\rho A \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + k' AG \left[\frac{\partial \psi}{\partial X} - \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right] + k_1 U + k_3 U^3 + \mu \frac{\partial U}{\partial T} - G_p \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = F_{01} \delta(X - VT_1) + F_{02} \delta(X - VT_2)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + k' AG \left[\psi - \frac{\partial U}{\partial X} \right] + k_f \psi + c_f \frac{\partial \psi}{\partial T} = 0 \quad (3)$$

Để đơn giản trong việc giải hệ phương trình vi phân chủ đạo, sử dụng các thông số và các biến không thứ nguyên như sau:

$$u = \frac{U}{L}; \quad t_i = \frac{T_i}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad x = \frac{X}{L};$$

$$\psi = \psi; \quad v = V \sqrt{\frac{L}{E}}; \quad a = A_{gt} L \frac{\rho}{E};$$

$$\alpha = \frac{k' G}{E}; \quad \beta = k' AG \frac{L^2}{EI}; \quad k_1 \leftrightarrow \frac{k_1 L^2}{EA}; \quad (4)$$

$$k_3 \leftrightarrow \frac{k_3 L^4}{EA}; \quad \mu \leftrightarrow \frac{\mu}{A} \sqrt{\frac{L^2}{\rho E}}; \quad G_p \leftrightarrow G_p \frac{1}{EA};$$

$$F_{0i} \leftrightarrow \frac{F_{0i}}{EA}; \quad k_f \leftrightarrow \frac{k_f L^2}{EA}; \quad c_f \leftrightarrow \frac{c_f}{L} \sqrt{\frac{L^2}{\rho E}}$$

với x là tọa độ không gian không thứ nguyên, t_i là đại lượng thời gian không thứ nguyên. Do đó (3) được chuyển về dạng biểu thức không thứ nguyên của phương trình chuyển động chủ đạo như sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + k_1 u + k_3 u^3 + \mu \frac{\partial u}{\partial t} - G_p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F_{01} \delta(x - vt_1) + F_{02} \delta(x - vt_2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta \left[\psi - \frac{\partial u}{\partial x} \right] + k_f \psi + c_f \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Hệ phương trình (5) là hệ phương trình vi phân chuyển động của dầm trên nền đàn nhớt phi tuyến bậc ba, đây là phương trình đạo hàm riêng với ẩn số là chuyển vị của dầm.

3. Phương pháp giải

Ứng dụng phương pháp Galerkin với lựa chọn hàm thử phù hợp, phân tích hàm chuyển vị $u(x, t)$, hàm góc xoay $\psi(x, t)$ thành tổng các tích hai hàm riêng biệt lần lượt theo biến không gian x và biến thời gian t

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \phi_k(x), \quad \phi_k(x) = \sin(k\pi x)$$

$$\psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) v_k(x), \quad v_k(x) = \cos(k\pi x) \quad (6)$$

trong đó: $\phi_k(x), v_k(x)$ là hàm thử; $q_k(t), \xi_k(t)$ là tập hợp tọa độ suy rộng của dầm. Trong phương trình (6) để xác định giá trị của $u(x, t), \psi(x, t)$ chỉ cần xét n phần tử đầu tiên, với n là giá trị mà tại đó hàm $u(x, t), \psi(x, t)$ đạt hội tụ nghĩa là giá trị của hàm không thay đổi đáng kể khi được phân tích thành nhiều hơn n phần tử. Thay (6) vào (5) được biểu thức

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \ddot{q}_k(t) + \mu \dot{q}_k(t) + [k_1 + G_p(k\pi)^2 + \alpha(k\pi)^2] q_k(t) \right\} \phi_k(x) - \alpha \left[\sum_{k=1}^n (k\pi) \xi_k(t) \phi_k(x) \right] + k_3 \left(\sum_{k=1}^n q_k(t) \phi_k(x) \right)^3 = \sum_{i=1}^2 F_{0i} \delta(x - vt_i)$$

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \ddot{\xi}_k(t) + c_f \dot{\xi}_k(t) + [k_f + (k\pi)^2 + \beta] \xi_k(t) \right\} v_k(x) - \beta \left[\sum_{k=1}^n (k\pi) q_k(t) v_k(x) \right] = 0 \quad (7)$$

Nhân hai vế (7) với hàm trọng số $w_i(x)$, sau đó tích phân trên miền $[0, 1]$ ta được:

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \ddot{q}_k(t) + \mu \dot{q}_k(t) + [k_1 + G_p(k\pi)^2 + \alpha(k\pi)^2] q_k(t) \right\} \int_0^1 \phi_k(x) w_i(x) dx - \alpha \left[\sum_{k=1}^n (k\pi) \xi_k(t) \int_0^1 \phi_k(x) w_i(x) dx \right] + k_3 \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n q_k(t) \phi_k(x) \right)^3 w_i(x) dx = \sum_{i=1}^2 F_{0i} \delta(x - vt_i) \int_0^1 \phi_k(x) w_i(x) dx$$

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \ddot{\xi}_k(t) + c_f \dot{\xi}_k(t) + [k_f + (k\pi)^2 + \beta] \xi_k(t) \right\} \int_0^1 v_k(x) w_i(x) dx - \beta \left[\sum_{k=1}^n (k\pi) q_k(t) \int_0^1 v_k(x) w_i(x) dx \right] = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Theo phương pháp Galerkin, hàm trọng số $w_i(x)$ được lấy bằng hàm thử $\phi_k(x)$, $v_k(x)$. Dầm có hai đầu tựa đơn kết hợp với điều kiện trực giao, được biểu thức sau:

$$\int_0^1 \phi_k(x) w_i(x) dx = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1/2 & k = i \end{cases}$$

$$\int_0^1 \psi_k(x) w_i(x) dx = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1/2 & k = i \end{cases} \quad (9)$$

Thay biểu thức (9) vào hệ phương trình (8) đồng thời áp dụng phép cầu phương tích phân để biến đổi tích phân, được hệ phương trình sau:

$$\ddot{q}_i(t) + \mu \dot{q}_i(t) + [k_1 + G_p(k\pi)^2 + \alpha(k\pi)^2] q_i(t) + 2k_3 \sum_{j=1}^N I_j F_j w_i(x_j) - \alpha(i\pi) \xi_i(t) = 2(F_{01} w_i(vt) + F_{02} w_i(vt))$$

$$\ddot{\xi}_i(t) + c_f \dot{\xi}_i(t) + [k_f + (k\pi)^2 + \beta] \xi_i(t) - \beta(i\pi) q_i(t) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

Vậy hệ phương trình vi phân chủ đạo không thứ nguyên ban đầu (5) đã được biến đổi thành hệ phương trình vi phân thường (10) có dạng phi tuyến bậc ba theo tọa độ suy rộng chỉ phụ thuộc vào biến thời gian t . Phương trình này hoàn toàn giải được bằng phương pháp Newmark, cho nghiệm là giá trị tọa độ suy rộng tại các điểm rời rạc trên toàn miền thời gian khảo sát, từ đó ứng xử động của dầm được xác định.

4. Kết quả số

Mục này trình bày kết quả số để khảo sát sự hội tụ của bài toán và sự ảnh hưởng của các thông số nền, dầm, tải trọng. Các đại lượng vật lý và hình học của dầm Timoshenko, nền, tải trọng được liệt kê trong Bảng 1⁵

Bảng 1. Các thông số nền, dầm, tải trọng.

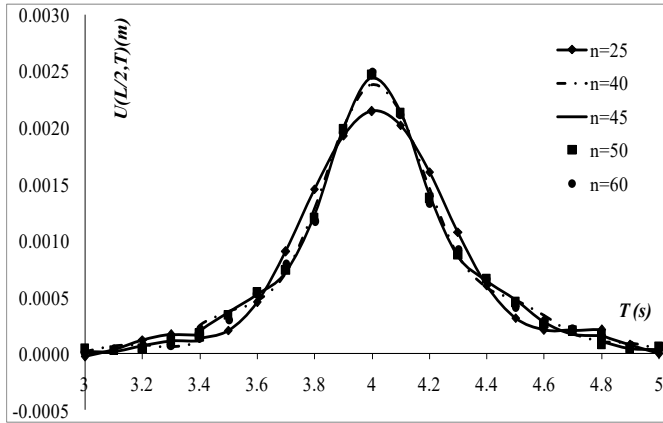
	Danh mục đại lượng	Giá trị	Giá trị không thứ nguyên
Dầm	Modul đàn hồi E (GPa)	6,998	-
	Modul biến dạng cắt G (GPa)	77	-
	Khối lượng riêng ρ (kg/m ³)	2373	-
	Chiều cao tiết diện h (m)	0,3	-
	Bề rộng tiết diện b (m)	1	-
	Chiều dài L (m)	160	-
	Hệ số cắt k'	0,4	-
	α	-	4,401
	β	-	$1,502 \times 10^7$
Nền	Hệ số nền tuyến tính k_1 (MPa)	8	97,552
	Hệ số nền phi tuyến k_3 (MN/m ⁴)	8	$2,497 \times 10^6$
	Hệ số cản μ (MNs/m ²)	0,3	39,263
	Modul biến dạng cắt G_p (N)	$6,669 \times 10^7$	0,0318
	Hệ số k_f (N)	10^8	$1,626 \times 10^5$
	Hệ số c_f (Ns)	$1,5 \times 10^6$	$2,618 \times 10^4$
Tải trọng di động	Độ lớn F_0 (N)	$2,126 \times 10^5$	$1,01 \times 10^{-4}$
	Vận tốc V (m/s)	20	0,01165

Đồ thị thể hiện chuyển vị giữa dầm khi lực di động ứng với từng trường hợp n được thể hiện trên Hình 2. Theo đó đồ thị có tính chất đối xứng qua trục đứng tại điểm $T = 4s$. Đồng thời, chuyển vị giữa dầm tăng khi $T < 4s$ và đạt giá trị lớn nhất tại $T = 4s$, sau đó giảm tiến về 0 khi $T > 4s$. Có sự khác biệt khi so sánh các đồ thị chuyển vị giữa dầm ứng với từng giá trị số hạng Galerkin n . Sự sai khác này lớn khi giá trị n còn nhỏ và giảm dần khi tăng dần giá trị n . Xét thấy với trường hợp $n = 40$ và $n = 45$ vẫn có thể thấy sự riêng biệt giữa hai đường đồ thị, tuy nhiên với ba đường đồ thị $n = 45$, $n = 50$, $n = 60$ gần như trùng nhau. Mặt khác giá trị chuyển vị lớn nhất tại giữa dầm tăng khi tăng số hạng Galerkin n , độ sai lệch giá trị này với từng trường hợp giảm dần khi n tăng và giá trị độ sai lệch giữa hai trường hợp $n = 45$ và $n = 50$ bằng 1,25 % là nhỏ. Từ đó kết luận rằng với giá trị số hạng Galerkin $n = 45$ bài toán ứng xử động của dầm đạt

sự hội tụ. Ngoài ra, so với bài báo sử dụng phương pháp Runge – Kutta⁷, bài báo sử dụng phương pháp Newmark để giải hệ phương trình vi phân thường đã cho nghiệm bài toán hội tụ với số số hạng Galerkin n nhỏ hơn ($n = 45 < n = 150$).

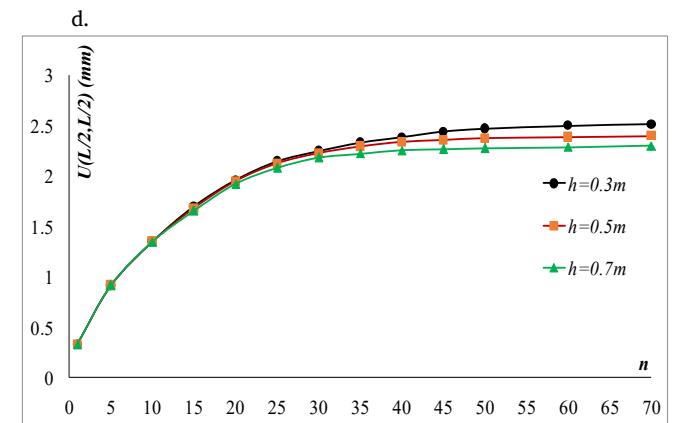
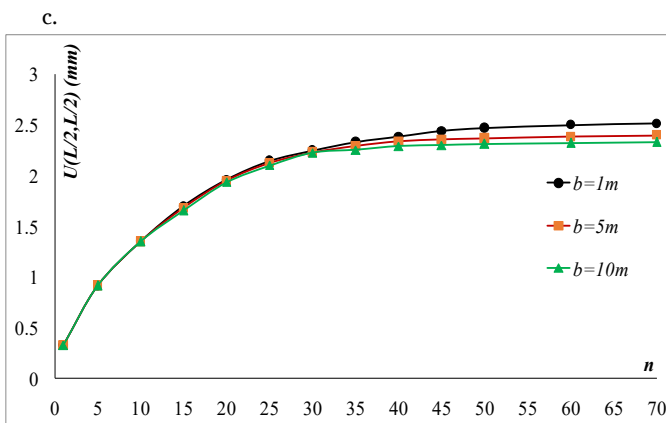
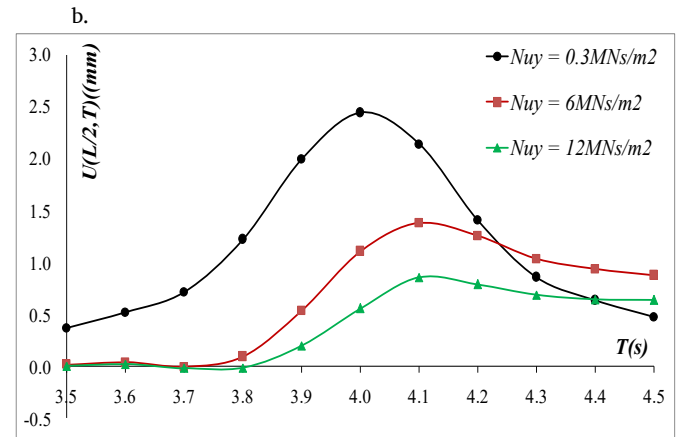
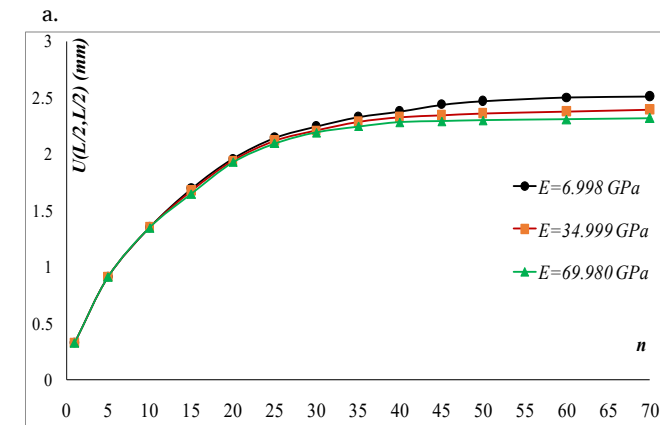
Hình 3 thể hiện đồ thị biểu diễn sự hội tụ số số hạng Galerkin n khi chịu tác động của các thông số. Với số số hạng Galerkin n được biểu diễn trên trục hoành và chuyển vị giữa dầm khi lực di động tại vị trí giữa dầm được biểu diễn trên trục tung. Đồ thị chỉ ra rằng tốc độ hội tụ nghiệm chuyển vị của bài toán tăng khi giảm L hoặc khi tăng lần lượt các thông số: E, G, G_p, h, b . Theo Hình 3a khi n đủ lớn để bài toán hội tụ thì giá trị chuyển vị giữa dầm gần như không đổi dù có sự biến đổi lớn các giá trị L , nói cách khác chuyển vị của dầm không chịu ảnh hưởng bởi chiều dài dầm. Điều này phản ánh tương tự kết luận trong tài liệu¹ là khi phân tích ứng xử của dầm trên nền đàn hồi có thể

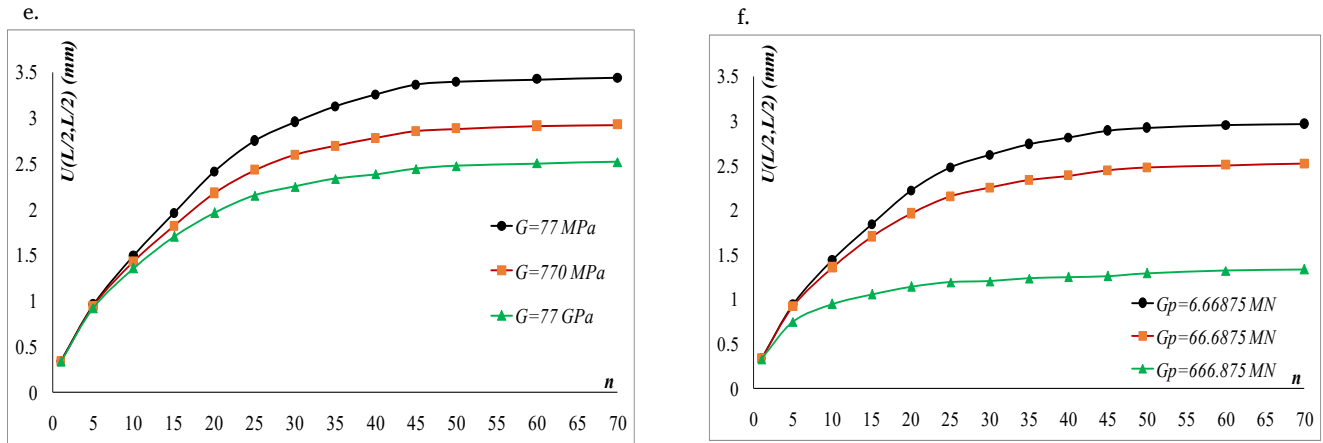
dùng dầm với chiều dài lớn hơn 10m để thay thế cho dầm vô hạn. Ngoài ra, giá trị chuyển vị dầm tăng khi tăng khi tăng n nhưng lại giảm khi tăng lần lượt giá trị các thông số trên ngoại trừ thông số chiều dài dầm. Mặt khác theo Hình 3b, 3c, 3d nhận thấy ít có sự sai khác hơn giữa chuyển vị của dầm ứng với các trường hợp thay đổi giá trị thông số E, h, b . Kết luận này tương tự với tài liệu⁷ khi xem xét với trường hợp dầm Euler-Bernoulli.



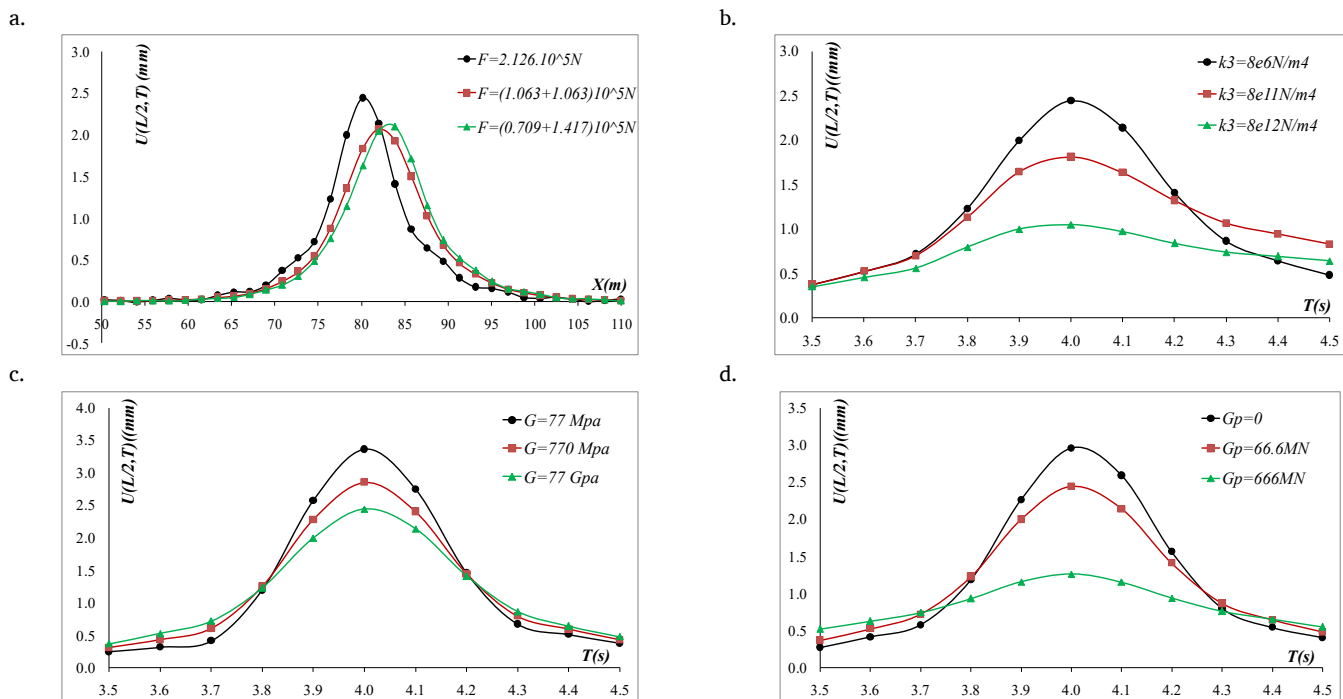
Hình 2. Chuyển vị giữa dầm khi lực di động với n thay đổi.

Đồ thị Hình 4a thể hiện lịch sử chuyển vị giữa dầm khi tải trọng là hai lực di động cách nhau 4m. Trong đó tổng độ lớn tải trọng F_{01} và F_{02} luôn không đổi và bằng F_0 giá trị F_{01} và F_{02} được cho tương ứng với từng trường hợp trên đồ thị. Kết quả chỉ ra với trường hợp tải trọng là hai lực tập trung di động, chuyển vị lớn nhất của dầm giảm so với trường hợp tải trọng là một lực tập trung di động. Ngoài ra vị trí chuyển vị lớn nhất của dầm có xu hướng dịch về phía có tải trọng trọng giảm ở trường hợp này là F_{01} . Đồ thị Hình 4b, 4c, 4d thể hiện lịch sử chuyển vị giữa dầm ứng với từng trường hợp giá trị thông số G, G_p, k_3 khác nhau. Theo Hình 4b các đường đồ thị thay đổi đáng kể và giá trị chuyển vị tại giữa dầm giảm khi giá trị hệ số k_3 tăng. Đồ thị Hình 4c cho thấy khi càng giảm giá trị G nghĩa là mô hình dầm Timoshenko dần trở thành mô hình dầm Euler – Bernoulli thì giá trị lớn nhất của chuyển vị dầm tăng nên giá trị lớn nhất của chuyển vị dầm được mô tả theo lý thuyết dầm Euler – Bernoulli lớn hơn so với mô tả theo lý thuyết dầm Timoshenko. Điều này tương tự như kết luận của tài liệu tham khảo⁸ khi thực hiện với dầm vô hạn và mô hình đất nền cứng hơn và cũng khẳng định mô hình Timoshenko cho kết quả ứng xử hợp lý hơn. Hình 4c cho thấy khi bỏ qua tính cắt của nền $G_p = 0$ thì giá trị lớn nhất của chuyển vị dầm là lớn nhất đồng nghĩa với giá trị lớn nhất của chuyển vị dầm trên mô hình nền Pasternak nhỏ hơn nhiều so với dầm trên mô hình nền đàn hồi Winkler.





Hình 3. Khảo sát sự hội tụ khi thay đổi các thông số.



Hình 4. Khảo sát ảnh hưởng các thông số đến chuyển vị dầm.

5. Kết luận

Từ các kết quả của bài báo này, một số kết luận được sơ lược như sau:

- Mô hình của hệ gồm có dầm, tải trọng di động và nền có ứng xử phi tuyến bậc ba được thiết lập. Phương trình đạo hàm riêng phi tuyến của hệ với ẩn số là chuyển vị của dầm được xác định. Phương pháp Galerkin trọng số dùng để rời rạc hóa chuyển vị để biến đổi phương trình chuyển động thành một hệ phương trình vi phân thường phi tuyến bậc ba với các ẩn số là các tọa độ suy rộng. Phương pháp tích phân số theo thời gian Newmark được áp dụng để giải hệ phương trình này và từ đó nghiệm của bài toán được tìm.

- Kết quả số chỉ ra rằng: Chuyển vị đứng của dầm và tốc độ hội tụ của bài toán chịu tác động bởi các thông số như modul đàn hồi của dầm, modul biến dạng cắt của dầm và nền, hệ số độ cứng của nền, chiều cao và bề rộng tiết diện của dầm, hệ số nền tuyến tính; hệ số nền phi tuyến và hệ số cản nhớt nền ảnh hưởng đến chuyển vị đứng của dầm nhưng ít ảnh hưởng đến tốc độ hội tụ bài toán; Trái lại, chiều dài dầm L ảnh hưởng đến tốc độ hội tụ bài toán nhưng gần như không ảnh hưởng đến chuyển vị dầm; So với tốc độ hội tụ bài toán, chuyển vị đứng của dầm có độ nhạy hơn.

- Giá trị chuyển vị lớn nhất của dầm chịu tác động bởi tính chất hệ nền đàn hồi, số lượng đặt tải di động.

Tài liệu tham khảo

- [1]. Thambiratnam D., Zhuge Y., Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subjected to moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, **1996**, 198,149-169.
- [2]. Kargarnovin M.H., Younesian D., Dynamics of Timoshenko beams on Pasternak foundations under moving loads, *Mechanical Research Communications*, **2004**, 31, 713-723.
- [3]. Younesian D., Kargarnovin M.H., Response of the beams on random Pasternak foundations subjected to harmonic moving loads, *Journal of Mechanical Science and Technology*, **2009**, 23, 3013-3023.
- [4]. Dahlberg T., Dynamic interaction between train and nonlinear railway track model, in *Proceedings of the Fifth European Conference on Structural Dynamics (EURODYN 2002)*, **Germany 2002**, 2, 1155-1160.
- [5]. Yang Y., Ding H., Chen L.Q., Dynamics response to a moving load of a Timoshenko beam resting on a nonlinear viscoelastic foundations, *Acta Mechanica Sinica*, **2013**, 29(5), 718 - 727.
- [6]. D.Younesian, M.H.Kargarnovin, Response of the beams on random Pasternak foundations subjected to harmonic moving loads, *Journal of Mechanical Science and Technology*, **2009**, 23, 3013-3023.
- [7]. Hu Ding, Li-Qun Chen, Shao-Pu Yang, Convergence of Galerkin truncation for dynamic response of finite beams on nonlinear foundations under a moving load, *Journal of Sound and Vibration*, **2012**, 331, 2426-2442.
- [8]. Ding H., Shi K.L., Chen L.Q., Yang S.P., Dynamics response of an infinite Timoshenko beam on a nonlinear viscoelastic foundations to a moving load, *Nonlineararm Dynamics*, 73 (2013), 285-298.
- [9]. Fletcher C.A.J., *Computational Galerkin Method*, Springer-Verlag, Newyork, **1984**.