

So sánh sự phù hợp của các mô hình phân phối xác suất đối với cường độ chịu nén của bê tông có xét tới ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước

Hồ Ngọc Khoa¹, Trần Hồng Hải¹, Lê Văn Minh¹, Phạm Tiến Tới¹, Vũ Anh Tuấn¹, Lê Hồng Hà¹, Lê Đình Tiến¹, Vũ Chí Công^{1*}

¹Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội

TỪ KHOA

Bê tông
Cường độ chịu nén
Hàm phân phối xác suất
Hiệu ứng kích thước
Phân phối xác suất

TÓM TẮT

Bài báo trình bày kết quả nghiên cứu so sánh về sự phù hợp của ba mô hình phân phối xác suất: phân phối chuẩn, phân phối log-normal và phân phối Weibull đối với cường độ chịu nén của bê tông có xét tới ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước trên bộ dữ liệu gồm 240 giá trị cường độ thực nghiệm. Các mẫu trụ bê tông với bốn loại kích thước được chế tạo từ hai cấp phối khác nhau. Kết quả nghiên cứu đã chỉ ra rằng: (i) với bất kể cấp phối bê tông và kích thước của mẫu thí nghiệm như thế nào, thì phân phối chuẩn đều cung cấp mô hình phân phối xác suất phù hợp nhất đối với cường độ nén của bê tông cũng như sự phụ thuộc của nó vào kích thước của mẫu thí nghiệm; (ii) dưới tác dụng của hiệu ứng kích thước, phân phối xác suất của cường độ nén của bê tông cũng bị ảnh hưởng bởi kích thước của mẫu; và (iii) sự phụ thuộc vào kích thước của phân phối xác suất đối với cường độ nén của bê tông có thể được diễn giải thông qua phân phối chuẩn và phân phối log-normal, nhưng không thể diễn giải bằng phân phối Weibull.

KEYWORDS

Concrete
Compressive strength
Distribution function
Size dependence
Probability distribution

ABSTRACT

This paper presents a comparative investigation on the size effect of the probability distribution of the compressive strength of concrete by using three common probability functions, including normal, log-normal, and Weibull distributions, was carried out on a set of 240 measured strength values. These strength datasets were derived from a comprehensive set of compression tests conducted on numerous concrete specimens of four distinct cylindrical sizes, which were prepared using two different concrete mix proportions. From this analysis, it is demonstrated that: (i) irrespective of the mix proportion, size, and type of the concrete specimen, the normal distribution offers the most relevant model for interpreting not only the probability distribution of the compressive strength of concrete but also its size dependence; (ii) the size effect on the compressive strength of concrete results in its probability distribution also being affected by the sample size; and (iii) the size effect on the probability distribution of concrete compressive strength can be interpreted through the normal and log-normal distributions, but not through the Weibull distribution.

1. Đặt vấn đề

Cường độ chịu nén của bê tông là thông số căn bản được sử dụng trong thiết kế kết cấu và đánh giá chất lượng bê tông [1]. Các kết quả thực nghiệm thường chỉ ra rằng giá trị trung bình và độ biến động xung quanh giá trị trung bình của các tập dữ liệu cường độ chịu nén của bê tông đều bị ảnh hưởng bởi kích thước của mẫu sử dụng trong các thí nghiệm đó [2–4]. Mặt khác, các tham số chính của bất kỳ hàm phân phối xác suất nào đều được quyết định bởi giá trị trung bình và độ biến động của các giá trị xung quanh giá trị trung bình này. Do đó, ảnh hưởng của kích thước mẫu (hay còn được gọi là hiệu ứng kích thước) trên cường độ nén của bê tông có thể cũng sẽ có ảnh hưởng tới phân phối xác suất đối với giá trị cường độ nén của bê tông. Để làm rõ nhận định này, thông thường cần một số lượng đáng kể các tập dữ liệu cường độ nén của bê tông, được thu thập từ các thí nghiệm nén trên các mẫu

bê tông có kích thước khác nhau. Tuy nhiên, công việc này đòi hỏi thời gian và nguồn lực (đặc biệt là chi phí thực hiện) đáng kể. Chính vì vậy, cho đến nay vẫn chưa có một nghiên cứu thực nghiệm quy mô lớn nào được triển khai để làm sáng tỏ nội dung trên.

Trong lĩnh vực nghiên cứu thống kê, hàm phân phối chuẩn thường được mặc định sử dụng như là công cụ chính để diễn tả phân phối xác suất của cường độ nén của bê tông [4–7]. Tuy nhiên, rất nhiều các nghiên cứu đã chỉ ra rằng một số mô hình khác cũng có thể diễn giải khá chính xác phân phối xác suất đối với giá trị cường độ nén của bê tông [1]. Trong số đó, ba hàm phân phối xác suất phổ biến nhất là phân phối chuẩn, phân phối log-normal [6,8], và phân phối Weibull [4,9]. Tuy nhiên, cho đến nay vẫn chưa thể xác định rõ ràng mô hình nào trong ba hàm phân phối này là phù hợp nhất để diễn giải phân phối xác suất của cường độ chịu nén của bê tông [4,8,9].

*Liên hệ tác giả: congvc@huce.edu.vn

Nhận ngày 05/11/2024, sửa xong ngày 11/12/2024, chấp nhận đăng ngày 12/12/2024

Link DOI: <https://doi.org/10.54772/jomc.06.2024.823>.

Trong các nghiên cứu được trích dẫn ở trên, phân phối xác suất đối với cường độ chịu nén của bê tông thường được phân tích từ các thí nghiệm nén trên các mẫu bê tông có kích thước và hình dáng cụ thể như mẫu lập phương cạnh 150 mm [10], mẫu trụ 150x300 mm [11], hay mẫu trụ 160x320 mm [12]. Trong các nghiên cứu này, phân phối xác suất của cường độ chịu nén thường được giả thiết là không khác biệt giữa các kích thước và hình dạng khác nhau của mẫu bê tông. Như đã đề cập ở trên, do sự ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước không chỉ lên giá trị trung bình và còn đối với cả mức độ biến động của nó, nên phân phối xác suất của cường độ chịu nén của bê tông có thể bị ảnh hưởng bởi kích thước và hình dạng của mẫu thí nghiệm. Tuy nhiên, vấn đề này thường bị bỏ qua trong các nghiên cứu trước đây khi phân tích về phân phối xác suất đối với giá trị cường độ chịu nén của bê tông. Điều này có thể dẫn đến kết quả không chính xác trong việc xác định cường độ đặc trưng, thông số cơ bản để phân chia cấp độ bền của bê tông và tính toán thiết kế kết cấu bằng bê tông [7].

Nghiên cứu này được thực hiện nhằm làm sáng tỏ một số câu hỏi còn tồn tại chính như sau: (i) Phân phối xác suất của cường độ chịu nén của bê tông có thể bị ảnh hưởng bởi kích thước mẫu hay không?; (ii) Hàm phân phối nào là phù hợp nhất để diễn giải phân phối xác suất đối với giá trị cường độ chịu nén của bê tông?; và (iii) Mô hình nào có khả năng kể đến sự ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước trong khi diễn giải phân phối xác suất của cường độ chịu nén của bê tông?

2. Phương pháp nghiên cứu

2.1. Vật liệu và Thí nghiệm

Nghiên cứu hiện tại sử dụng tập dữ liệu gồm 240 giá trị cường độ chịu nén của các nhóm mẫu trụ bê tông khác nhau được cung cấp từ một nghiên cứu thực nghiệm mới đây của chúng tôi [13]. Hai loại cấp phối bê tông với cùng tỷ lệ cấp phối nhưng sử dụng cốt liệu thô (đá dăm) với hai loại kích thước ($d_{a,max}$) khác nhau được chế tạo: cấp phối MIX-1 với ($d_{a,max} = 20$ mm) và cấp phối MIX-2 ($d_{a,max} = 40$ mm). Chi tiết về tỷ lệ trộn và các đặc tính kỹ thuật của các thành phần cấp phối cho hai loại bê tông này được trình bày trong [13]. Tất cả các mẫu bê tông thí nghiệm là các mẫu trụ với tỷ lệ giữa chiều dài/đường kính cố định là: $l/d = 2$. Đối với một loại cấp phối, có 04 loại kích thước mẫu thí nghiệm được xem xét: $d \times l = 50 \times 100$ mm (CY50), 75×150 mm (CY75), 100×200 mm (CY100), và 150×300 mm (CY150). Tương ứng với mỗi loại kích thước mẫu và mỗi loại cấp phối bê tông, có 30 mẫu được chế tạo và thí nghiệm. Các mẫu bê tông được thí nghiệm nén một trục ở tuổi từ 90-95 ngày với máy nén có lực nén tối đa 2000 kN tuân thủ theo quy trình nén mô tả trong [14].

2.2. Hàm phân phối xác suất

2.2.1. Phân phối Weibull

Dựa trên lý thuyết về liên kết yếu nhất (the weakest-link theory) và giả định về một quy luật hàm mũ đối với sự xuất hiện các khuyết tật (điểm yếu) trong khối tích một mẫu vật liệu, Weibull đã đưa ra biểu

thức để xác định xác suất phân phối đối giá trị cường độ chịu lực (σ) của một mẫu vật liệu như sau [15]:

$$P_f(\sigma) = 1 - \exp \left[-\frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (1)$$

Trong đó, V là thể tích của mẫu vật liệu; V_0 được xem như một thông số thể tích (kích thước) tham chiếu đặc trưng cho vật liệu; σ_0 và m là hai tham số chính của hàm phân phối.

2.2.2. Phân phối chuẩn

Hàm mật độ xác suất của phân phối chuẩn với tham số tỷ lệ, σ , và tham số hình dạng, α , được biểu thị như sau:

$$P_f(\sigma) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\sigma - \bar{\sigma})^2}{2\alpha^2} \right] \quad (2)$$

Trong đó, $\bar{\sigma}$ và α tương ứng là giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của tập dữ liệu gồm n giá trị cường độ chịu lực.

2.2.3. Phân phối log-normal

Hàm mật độ xác suất của phân phối log-normal với tham số tỷ lệ, μ , và tham số hình dạng, β , được diễn giải như sau:

$$P_f(\sigma) = \frac{1}{\sigma\beta\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\ln \sigma - \mu)^2}{2\beta^2} \right] \quad (3)$$

2.3. Tiêu chí lựa chọn mô hình

Trong nghiên cứu này, để định lượng mức độ phù hợp của một hàm phân phối xác suất đối với một tập dữ liệu cụ thể, phép thử Kolmogorov-Smirnov (K-S test) [16,17] được sử dụng do đặc tính đơn giản và không phải gộp dữ liệu (data binning). Phép thử K-S dựa trên hàm phân phối thực nghiệm, F_n được xây dựng từ một tập dữ liệu gồm n giá trị x_i (với $i = 1 \rightarrow n$) được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Giá trị F_n của giá trị x_i được xác định như sau [18]:

$$F_n(x_i) = n(i)/n \quad (4)$$

Trong đó, $n(i)$ là số lượng các giá trị trong tập dữ liệu nhỏ hơn giá trị x_i . Giá trị thống kê Kolmogorov-Smirnov (hay chỉ số K-S), D_n , cho một hàm phân phối xác suất bất kỳ nào đó được xác định bởi công thức sau:

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \quad (5)$$

Trong đó $\sup_x$ là “cận trên nhỏ nhất” mà lớn hơn hoặc bằng mọi giá trị trong tập hợp n giá trị D_n . Một hàm phân phối xác suất được coi là phù hợp với tập dữ liệu, nếu $D_n < D_{nc}$, với D_{nc} là giá trị giới hạn tương ứng với một mức ý nghĩa thống kê (significance level). Trong nghiên cứu này, tất cả các phép thử K-S được thực hiện với mức ý nghĩa thống kê là 0,05 (tương ứng với mức độ tin cậy 95%). Với mức ý nghĩa thống kê này và với số lượng giá trị trong một tập dữ liệu là $n = 30$, giá trị giới hạn $D_{nc} = 0,24$ [19]. Ngoài ra, dựa trên phép thử K-S, hàm phân phối xác suất nào cho giá trị D_n thấp nhất thì được coi là mô hình phù hợp nhất với tập dữ liệu các giá trị cường độ chịu nén của bê tông.

Trong nghiên cứu này, hai chỉ số đánh giá là AIC (Akaike Information Criterion) [20] (công thức (6)) và BIC (Bayesian Information Criterion) [21] (công thức (7)) cũng được sử dụng để so sánh mức độ phù hợp của các hàm phân phối xác suất với các tập dữ liệu cường độ chịu nén của bê tông.

$$AIC = 2k - 2 \ln(\hat{L}) \quad (6)$$

$$BIC = k \ln(n) - 2 \ln(\hat{L}) \quad (7)$$

Trong đó, k là số lượng các tham số chính (distribution parameters) và $\hat{L}$ là biểu thị giá trị của ước lượng hợp lý cực đại (maximum likelihood) của một hàm phân phối xác suất. Đối với một tập dữ liệu, hàm phân phối xác suất nào có giá trị AIC hoặc/và BIC nhỏ nhất sẽ là mô hình phù hợp nhất để diễn giải phân phối xác suất của tập dữ liệu đó. Trong nghiên cứu này, cả ba hàm phân phối xác suất đều có $k = 2$ và mỗi tập dữ liệu đều có 30 giá trị cường độ chịu nén ($n = 30$). Do đó, hàm phân phối xác suất nào có giá trị $\hat{L}$ (hoặc $\ln(\hat{L})$) nhỏ nhất sẽ được xem là mô hình phù hợp nhất để diễn giải phân phối xác suất đối với giá trị cường độ chịu nén của bê tông.

3. Kết quả và Bàn luận

3.1. Hiệu ứng kích thước đối với các tham số chính của hàm phân phối xác suất

Bảng 1 giới thiệu giá trị của các tham số chính đối với ba hàm phân phối xác suất xem xét trong nghiên cứu này đối với các tổ mẫu bê tông khác nhau. Từ các giá trị này, có thể thấy rằng:

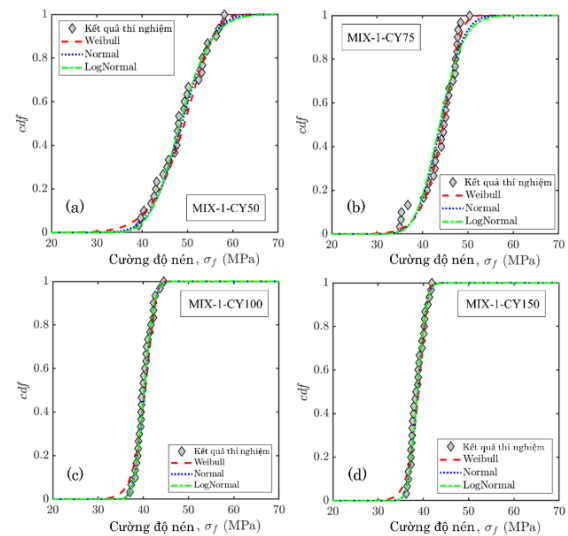
(i) Với bất kể hàm phân phối nào, đối với một tổ mẫu cụ thể (một tập dữ liệu cường độ nhất định), tham số tỷ lệ giảm khi kích thước mẫu và cốt liệu tăng lên. Điều này có thể giải thích như sau. Đối với các tổ mẫu bê tông sử dụng trong nghiên cứu này, giá trị cường độ nén trung bình đã được chỉ rõ là bị ảnh hưởng bởi cả kích thước mẫu và kích thước cốt liệu sử dụng khi chế trộn (xem thêm chi tiết trong [13]). Hơn nữa, tham số tỷ lệ của cả ba hàm phân phối xác suất sử dụng trong nghiên cứu này đều tỷ lệ thuận với giá trị cường độ trung bình. Do đó, giá trị tham số tỷ lệ cũng sẽ bị ảnh hưởng bởi sự thay đổi trong kích thước của mẫu bê tông thí nghiệm và kích thước cốt liệu (xem Hình 1 và Hình 2).

(ii) Đối với một tổ mẫu nhất định, thông số hình dạng của phân phối chuẩn và phân phối log-normal giảm khi kích thước của mẫu bê tông tăng lên, trong khi đó xu hướng ngược lại được quan sát thấy đối với phân phối Weibull. Quan sát này là phù hợp với kết quả đã được báo cáo trước đây trong [13] rằng độ biến thiên của các giá trị thực nghiệm xung quanh giá trị cường độ nén trung bình của một tập dữ liệu giảm đi khi kích thước mẫu bê tông tăng lên.

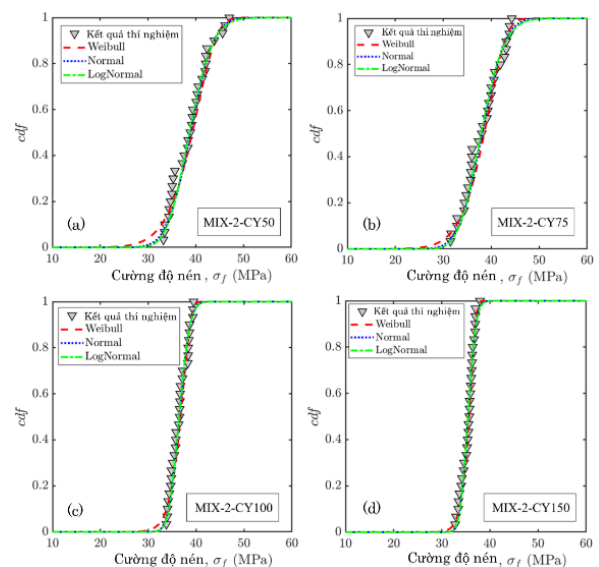
3.2. Mô hình phù hợp để diễn giải phân phối xác suất của cường độ nén của bê tông

Giá trị các chỉ số và của ba hàm phân phối xác suất đối với các tập dữ liệu cường độ nén khác nhau của hai cấp phối MIX-1 và MIX-2 được tổng hợp ở Bảng 2. Tất cả các giá trị thu được đều nhỏ hơn giá trị giới hạn. Điều này có nghĩa rằng phân phối xác suất của cường độ nén của bê tông có thể được diễn giải bởi cả ba hàm phân phối xem xét

trong nghiên cứu này. Tuy nhiên, với mọi tổ mẫu, giá trị của phân phối chuẩn và phân phối log-normal luôn nhỏ hơn phân phối Weibull. Điều đó chỉ ra rằng, phân phối chuẩn và phân phối log-normal cung cấp hàm phân phối xác suất sát với các giá trị thực nghiệm của cường độ nén của bê tông hơn so với phân phối Weibull. Nhận xét này cũng được củng cố thêm bởi một kết quả khác thu được đó là: đối với mọi tổ mẫu, giá trị của phân phối Weibull luôn luôn nhỏ hơn phân phối chuẩn và phân phối log-normal (xem Bảng 2). Mặc dù sự khác biệt về giá trị của phân phối chuẩn và phân phối log-normal là không quá lớn, tuy nhiên, một cách tổng quát căn cứ vào các giá trị thể hiện ở Bảng 2 có thể kết luận rằng, phân phối chuẩn là mô hình phù hợp nhất để diễn giải phân phối xác suất của cường độ nén của bê tông.



Hình 1. Hàm phân phối tích lũy (cdf) của các tập dữ liệu giá trị cường độ nén đối với các tổ mẫu khác nhau của cấp phối MIX-1.



Hình 2. Hàm phân phối tích lũy (cdf) của các tập dữ liệu giá trị cường độ nén đối với các tổ mẫu khác nhau của cấp phối MIX-2.

Bảng 1. Giá trị của các tham số chính của các hàm phân phối xác suất đối với các tổ mẫu bê tông.

Cấp phối	Tổ mẫu	Phân phối Weibull				Phân phối chuẩn				Phân phối Log-Normal			
		σ_0		m		$\bar{\sigma}$		α		μ		β	
		TB	SS	TB	SS	TB	SS	TB	SS	TB	SS	TB	SS
MIX-1	MIX-1-CY50	51,2	1,9	10,0	2,8	48,7	2,1	5,5	1,5	3,88	0,04	0,11	0,03
	MIX-1-CY75	45,7	1,2	14,6	4,3	44,0	1,5	4,1	1,1	3,78	0,04	0,10	0,03
	MIX-1-CY100	41,1	0,7	22,1	5,7	40,2	0,7	1,8	0,5	3,69	0,02	0,04	0,01
	MIX-1-CY150	39,5	0,6	24,8	6,7	38,7	0,6	1,6	0,4	3,66	0,02	0,04	0,02
MIX-2	MIX-2-CY50	40,7	1,5	10,5	2,8	38,9	1,5	3,9	1,1	3,66	0,04	0,10	0,03
	MIX-2-CY75	39,8	1,3	11,3	3,2	38,1	1,4	3,8	1,1	3,63	0,04	0,10	0,03
	MIX-2-CY100	37,3	0,6	22,7	6,3	36,5	0,7	1,8	0,5	3,60	0,02	0,05	0,01
	MIX-2-CY150	36,1	0,4	32,3	9,0	35,5	0,5	1,3	0,4	3,57	0,01	0,04	0,01

Bảng 2. Tổng hợp các giá trị (D_n) và ($\ln(\hat{L})$) của ba hàm phân phối xác suất đối với các tập dữ liệu cường độ nén khác nhau của hai cấp phối MIX-1 và MIX-2.

Cấp phối	Tổ mẫu	Phân phối Weibull		Phân phối chuẩn		Phân phối Log-Normal	
		D_n	$\ln(\hat{L})$	D_n	$\ln(\hat{L})$	D_n	$\ln(\hat{L})$
MIX-1	MIX-1-CY50	0,113	-93,8	0,091	-93,2	0,099	-93,3
	MIX-1-CY75	0,097	-81,5	0,094	-80,3	0,099	-81,7
	MIX-1-CY100	0,136	-62,8	0,098	-59,2	0,104	-59,5
	MIX-1-CY150	0,132	-58,9	0,126	-56,2	0,129	-56,5
MIX-2	MIX-2-CY50	0,137	-84,9	0,131	-82,8	0,133	-83,1
	MIX-2-CY75	0,157	-82,9	0,126	-82,4	0,140	-82,5
	MIX-2-CY100	0,136	-60,5	0,132	-59,3	0,132	-59,3
	MIX-2-CY150	0,069	-49,8	0,055	-48,5	0,062	-48,8

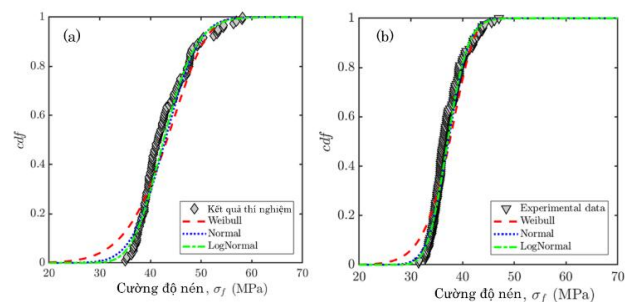
Đối với một loại cấp phối bê tông nhất định, giá trị $\ln(\hat{L})$ của cả ba hàm phân phối xác suất đều tăng khi kích thước của mẫu tăng lên. Kết quả này chỉ ra rằng sự phù hợp của một hàm phân phối xác suất đối với tập dữ liệu cường độ nén của bê tông sẽ tăng lên khi các giá trị này được xác định từ thực nghiệm trên các mẫu bê tông có kích thước lớn hơn.

Với cùng một loại kích thước mẫu và một hàm phân phối xác suất nhất định, giá trị $\ln(\hat{L})$ đối với các tổ mẫu của cấp phối MIX-2 thường cao hơn so với cấp phối MIX-1. Điều này cho thấy sự ảnh hưởng nhất định của thành phần cấp phối (ở đây là kích thước của cốt liệu) đối với sự phù hợp của một mô hình khi diễn giải phân phối xác suất của cường độ nén của bê tông. Tuy nhiên, quy luật về sự ảnh hưởng này vẫn chưa thể được chỉ ra một cách rõ ràng với chỉ hai cấp phối được xem xét trong nghiên cứu này. Một nghiên cứu tương tự nghiên cứu này nhưng trên ít nhất ba cấp phối khác nhau trở lên là cần thiết để làm sáng tỏ quy luật về sự ảnh hưởng của cấp phối (hoặc kích thước cốt liệu) đối với sự phù hợp của một mô hình xác suất cho cường độ nén của bê tông.

3.3. Mô hình phù hợp diễn giải hiệu ứng kích thước đối với phân phối xác suất của cường độ nén của bê tông

Hình 3a và Hình 3b lần lượt biểu thị phân phối tích lũy thực nghiệm và hàm phân phối tích lũy theo ba mô hình phân phối xác suất được xem xét trong nghiên cứu này cho tất cả các tổ mẫu của cấp phối

MIX-1 và MIX-2. Như kết quả thể hiện trên các hình này, tất cả các tập dữ liệu cường độ nén của bê tông cho cả bốn kích thước mẫu và hai cấp phối bê tông đều tuân theo phân phối chuẩn hoặc phân phối log-normal, trong khi phân phối Weibull về cơ bản là không phù hợp với số liệu thực nghiệm. Nhận xét này là phù hợp với các giá trị (D_n), $\ln(\hat{L})$, AIC, và BIC đối với tất cả các tổ mẫu của cấp phối MIX-1 và MIX-2 như thể hiện ở Bảng 3.



Hình 3. Hàm phân phối tích lũy (cdf) của các tập dữ liệu cường độ chịu nén đối với tất cả các tổ mẫu của cấp phối (a) MIX-1 và (b) MIX-2.

Chỉ số D_n của phân phối Weibull trong tất cả các trường hợp xem xét đều lớn hơn giá trị giới hạn. Hơn nữa, các giá trị AIC và BIC của phân phối Weibull cũng lớn hơn rất nhiều so với phân phối chuẩn và phân phối log-normal. Trong khi đó, phân phối chuẩn luôn luôn có các chỉ số D_n ,

AIC và BIC là nhỏ nhất khi so sánh với phân phối log-normal và phân phối Weibull trong tất cả các trường hợp phân tích (xem Bảng 3). Điều này cho phép kết luận rằng, trong ba hàm phân phối xác suất xem xét

trong nghiên cứu này, phân phối chuẩn là mô hình phù hợp nhất có thể kể đến sự ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước khi diễn giải phân phối xác suất của cường độ nén của bê tông.

Bảng 3. Tổng hợp các giá trị (D_n), ($\ln(\hat{L})$), AIC và BIC của ba hàm phân phối xác suất đối với tất cả các tổ mẫu của cấp phối MIX-1 và MIX-2.

Cấp phối	Hàm phân phối	Số giá trị cường độ nén, n	Số lượng tham số chính của hàm phân phối, k	Phép thử Kolmogorov-Smirnov		Maximum log-likelihood, $\ln(\hat{L})$	AIC	BIC
				D_n	D_{nc}			
MIX-1	Weibull	120	2	0,137	0,123	-2084,1	4172,2	4177,7
	Normal			0,109		-137,4	278,8	284,3
	Log-normal			0,122		-473,5	951,1	956,7
MIX-2	Weibull	120		0,144		-3030,2	6064,4	6070,0
	Normal			0,115		-122,5	249,1	254,6
	Log-normal			0,121		-446,8	897,5	903,1

4. Kết luận

Trong bài báo này, từ kết quả nghiên cứu so sánh ba hàm phân phối xác suất phổ biến là phân phối chuẩn, phân phối log-normal và phân phối Weibull, một số kết luận quan trọng đã được chỉ ra như sau:

- Với mức độ tin cậy 95 %, cả ba mô hình nêu trên đều phù hợp để diễn giải phân phối xác suất đối với một tập dữ liệu cường độ nén của bê tông được xác định từ một loại kích thước mẫu thí nghiệm. Tuy nhiên, phân phối Weibull cho mức độ phù hợp là kém nhất khi so sánh với hai hàm phân phối xác suất còn lại, trong khi đó phân phối chuẩn là mô hình phù hợp nhất.

- Do ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước trên cường độ nén của bê tông, các tham số chính của bất kỳ hàm phân phối xác suất nào cũng đều bị ảnh hưởng bởi kích thước của cả mẫu thí nghiệm và cốt liệu.

- Phân phối chuẩn là mô hình phù hợp nhất để thể hiện sự ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đối với phân phối xác suất của cường độ nén của bê tông.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (HUCE) trong đề tài mã số 28-2024/KHXD.

Tài liệu tham khảo

- [1]. A.M. Neville, J.J. Brooks (2010), "Properties of concrete", 4th ed., *Pearson Education Limited*.
- [2]. Z.P. Bazant, J. Planas (1998), "Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials", *CRC Press*, Boca Raton, Florida, USA.
- [3]. G. Muciaccia, G. Rosati, G. Di Luzio (2017), "Compressive failure and size effect in plain concrete cylindrical specimens", *Construction and Building Materials*, 137, pp. 185–194.
- [4]. X. Chen, S. Wu, J. Zhou (2013), "Variability of Compressive Strength of Concrete Cores", *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 28(4). DOI: 10.1061/(ASCE)CF.1943-5509.0000513.
- [5]. T. Chmielewski, E. Konopka (1999), "Statistical evaluations of field concrete

strength", *Magazine of Concrete Research*, 51, pp. 45–52.

- [6]. C. Unanwa, M. Mahan (2014), "Statistical Analysis of Concrete Compressive Strengths for California Highway Bridges", *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 28, pp. 157–167.
- [7]. Y. Zhai (2022), "Experimental Study on the Size Effect on the Probability Distribution of Concrete Compressive Strength", *Advances in Civil Engineering*, 7568279. DOI: 10.1155/2022/7568279.
- [8]. K. Kilinc, A.O. Celik, M. Tuncan, A. Tuncan, G. Arslan, O. Arioz (2012), "Statistical distributions of in situ microcore concrete strength", *Construction and Building Materials*, 26, pp. 393–403.
- [9]. P.J. Tumidajski, L. Fiore, T. Khodabocus, M. Lachemi, R. Pari (2006), "Comparison of Weibull and normal distributions for concrete compressive strengths", *Canadian Journal of Civil Engineering*, 33, pp. 1287–1292.
- [10]. BS 8110-2:1985 (1985), "Structural use of concrete — Part 2: Code of practice for special circumstances".
- [11]. ACI 318-05 (2005), "Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary", *American Concrete Institute*.
- [12]. EN 1992 (ver. 2004), "Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings", *European Committee for Standardization*.
- [13]. C.C. Vu, N.K. Ho, T.A. Pham (2022), "Weibull statistical analysis and experimental investigation of size effects on the compressive strength of concrete-building materials", *Case Studies in Construction Materials*, 17(e01231).
- [14]. EN 12390-3:2019 (2019), "Testing hardened concrete - Part 3: Compressive strength of test specimens", *European Committee for Standardization*.
- [15]. W. Weibull (1939), "A statistical theory of the strength of materials", *The Royal Swedish Institute For Engineering Research*, 151.
- [16]. Kolmogorov (1933), "Sulla determinazione empirica di una legge didistribuzione", *Giorn Dell'inst Ital Degli Att.*, 4, pp. 89–91.
- [17]. N. Smirnov (1939), "Estimate of deviation between empirical distribution functions in two independent samples", *Bulletin Moscow University*, 2(2).
- [18]. I.M. Chakravarti, R.G. Laha, J. Roy (1967), "Handbook of Methods of Applied Statistics", *Wiley*.
- [19]. F.J. Massey (1951), "The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit Author", *Journal of the American Statistical Association*, 46 (253), pp. 68–78.
- [20]. H. Akaike (1998), "Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle", *Springer New York*, pp. 199–213. DOI: 10.1007/978-1-4612-1694-0_15.
- [21]. G. Schwarz (1978), "Estimating the dimension of a model", *The Annals of Statistics*, 6(2), pp. 461–464.